

physike = 40 Gixij

- Schein + Klausur = erfolgreiche Teilnahme

2.3 Euklidischer Vektorraum

- "Wie lang sind Vektoren?", "Welche Winkel schließen Vektoren ein?"

• Def:

Ein euklidischer Vektorraum besteht aus einem reellen V und einem Skalarprodukt (inneres Produkt) $\underline{a} \cdot \underline{b} \in \mathbb{R}$ mit den Eigenschaften:

(A1) $\underline{a} \cdot \underline{b} = \underline{b} \cdot \underline{a}$... Symmetrie

(A2) $\underline{a} \cdot \underline{a} \geq 0$

(A3) $\underline{a} \cdot \underline{a} = 0 \iff \underline{a} = 0$ } positive Definitheit

(A4) $(p\underline{a}) \cdot \underline{b} = p(\underline{a} \cdot \underline{b}), p \in \mathbb{R}$ } ... Linearität

(A5) $(\underline{a} + \underline{b}) \cdot \underline{c} = \underline{a} \cdot \underline{c} + \underline{b} \cdot \underline{c}$

(2.7)

- " " ... symmetrische (A1), positive-definite (A2/3), bilinear (A1/A4/A5) Abbildung: $V \times V \rightarrow \mathbb{R}$

• Länge, Betrag, Norm \underline{a} : $a = |\underline{a}| = \sqrt{\underline{a} \cdot \underline{a}}$ (2.8)

• \underline{a} "senkrecht auf" (\perp) \underline{b} , falls $\underline{a} \cdot \underline{b} = 0$ (2.9)

• Geg: Basis $\{\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n\}$ in $V \rightarrow$

Orthonormal Basis

Def:

$\underline{e}_i \cdot \underline{e}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i=j \dots \text{normiert, Einheitsvekt.} \\ 0, & i \neq j \dots \text{orthogonal} \end{cases}$

Kronecker Symbol ($i, j = 1, \dots, n$)

(2.10)

Bem.: Erzeugung von Orthonormal-Basis aus bel. Basis
 → Gram-Schmidt'sches Orthonormierungs-
 Verf. → ÜB.

• Bsp 1: Vektoren für Physiker (s. 2.4)

• Bsp 2: \mathbb{R}^n : $\underline{a} \cdot \underline{b} = a_1 b_1 + \dots + a_n b_n$ (2.11)

• Bsp 3: $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$: $\underline{A} \cdot \underline{B} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m A_{ij} B_{ij}$ (2.12)

mit transponierte Matrix $[\underline{B}^t]_{ji} = B_{ij}$ (2.13)

$$\underline{B} = \begin{pmatrix} | & | & | \\ 1 & 2 & 3 \\ | & | & | \end{pmatrix} \rightarrow \underline{B}^t = \begin{pmatrix} \hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline 3 \end{pmatrix}$$

$$\underline{A} \cdot \underline{B} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m A_{ij} [\underline{B}^t]_{ji} = \text{Sp}(\underline{A} \underline{B}^t) \quad (2.14)$$

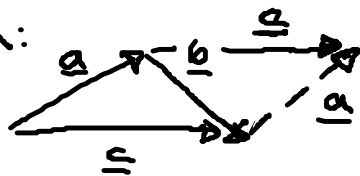
Spur der Matrix:
 mit $[\underline{A} \underline{B}^t]_{ik} = \sum_j A_{ij} B_{jk}$

2.4 Vektoren für PhysikerInnen (im 3D)

(1) Vektor: Richtung & Länge (Bsp: Kraft, Geschw.)

 $\underline{a} = |\underline{a}| \hat{\underline{a}}$ ← Einheitsvektor: Länge 1


(2) Addition:



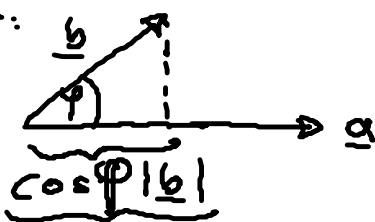
$$\underline{a} + \underline{b} = \underline{c} \stackrel{!}{=} \underline{b} + \underline{a} \quad (2.15)$$

induktives Verständnis
 von Paralleltransport von
 Vektoren

(3) Multiplikation mit Skalar:

 $p\underline{a} = p|\underline{a}| \hat{\underline{a}} \quad (2.16)$

(4) Skalarprodukt: $\underline{a} \cdot \underline{b} = |\underline{a}| |\underline{b}| \cos \varphi$ (2.17)

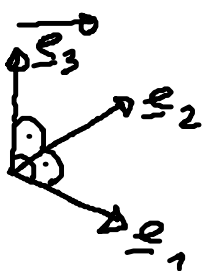


Projektion von \underline{b} auf die Richtung von \underline{a}

(1)-(4): \rightarrow euklidischer Vektorraum, Beweis: ÜB.

2.4.1. Orthonormal Basis

• (2.10) $\underline{e}_i \cdot \underline{e}_j = \delta_{ij}$ mit $i, j = 1, 2, 3$ (2.18)



Konvention: $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3\}$... Rechtssystem [Rechte-Hand-Regel]

• Darstellung eines Vektors:

$$\underline{a} = \sum_{i=1}^3 a_i \underline{e}_i = a_i \underline{e}_i, \quad a_k = \underline{a} \cdot \underline{e}_k \quad (2.19)$$

in Zukunft:

Einsteinsche Summenkonvention
 "über doppelt vorkommende Indices
 wird summiert"

• Skalarprodukt in Komponenten:

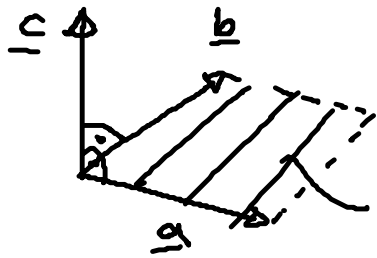
$$\underline{a} \cdot \underline{b} = a_i b_j \underbrace{\underline{e}_i \cdot \underline{e}_j}_{\delta_{ij}} = a_i b_i \quad (2.20)$$

Bilinearität

Standard-Skalarprodukt
 im \mathbb{R}^n

2.4.2. Vektorprodukt (äußeres Produkt)

• Geg: $\underline{a}, \underline{b}$



$$\underline{c} := \underline{a} \times \underline{b} \quad | \underline{c} | = |\underline{a}| |\underline{b}| \sin \varphi$$

$\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ bilden Rechtssystem / -schraube

→ \underline{c} charakt. einen Drehsinn

• \underline{c} ... axialer oder Pseudovektor:

Raumspiegelung: $\left. \begin{matrix} \underline{a} \rightarrow -\underline{a} \\ \underline{b} \rightarrow -\underline{b} \end{matrix} \right\}$ aber $\underline{c} \rightarrow \underline{c}!$

• Bsp: "Momente": bezogen auf Pkt. im Raum



(1) Drehimpuls eines Pkt. teilchens: ($\underline{a} = \underline{p}$)

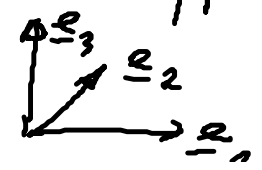
$$\underline{L} = \underline{r} \times \underline{p}$$

(2) Drehmoment: $\underline{a} = \underline{F} \rightarrow \underline{M} = \underline{r} \times \underline{F}$

→ Mechanik

• Rechenregeln: $\left. \begin{matrix} (1) \underline{a} \times \underline{b} = -\underline{b} \times \underline{a} \rightarrow \underline{a} \times \underline{a} = \underline{0} \\ (2) \underline{a} \times (\underline{b} + \underline{c}) = \underline{a} \times \underline{b} + \underline{a} \times \underline{c} \\ (3) p \underline{a} \times \underline{b} = \underline{a} \times p \underline{b} = p (\underline{a} \times \underline{b}), p \in \mathbb{R} \end{matrix} \right\} (2.22)$

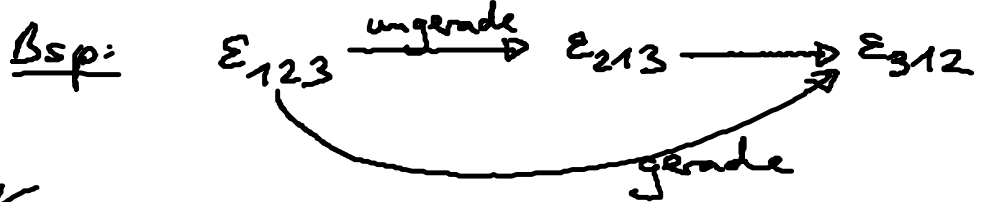
• orthonormierte Basis, Rechtssystem: $\underline{e}_i \times \underline{e}_i = \underline{0}, i=1,2,3$



$$\left. \begin{array}{l} \underline{e}_1 \times \underline{e}_2 = \underline{e}_3 \\ \underline{e}_2 \times \underline{e}_3 = \underline{e}_1 \\ \underline{e}_3 \times \underline{e}_1 = \underline{e}_2 \end{array} \right\} \text{zykl. Vertauschung} \quad \text{mit} \quad \boxed{\underline{e}_i \times \underline{e}_j = \varepsilon_{ijk} \underline{e}_k} \quad (2.23)$$

$$\varepsilon_{ijk} := \begin{cases} 1 & \text{für } \varepsilon_{123} \\ 1 & \text{" alle geraden Permutationen von } 123 \\ -1 & \text{" alle ungeraden Permutationen von } 123 \\ 0 & \text{sonst, d.h. mind. 2 Indizes gleich} \end{cases} \quad (2.24)$$

... vollständig antisymmetrische oder Levi-Civita-Tensor



• $\underline{a} \times \underline{b}$ in Komp: $\underline{a} \times \underline{b} = (a_i \underline{e}_i) \times (b_j \underline{e}_j) \stackrel{(2.22)}{=} a_i b_j \underline{e}_i \times \underline{e}_j$

$\rightarrow \boxed{\underline{a} \times \underline{b} \stackrel{(2.23)}{=} \varepsilon_{kij} a_i b_j \underline{e}_k} \quad 2.25$

$\underbrace{\varepsilon_{kij} a_i b_j}_{(\underline{a} \times \underline{b})_k}$

• Merkmalsregel:

$$\underline{a} \times \underline{b} = \begin{vmatrix} \underline{e}_1 & \underline{e}_2 & \underline{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \dots + (2.26)$$

... Determinante (s. später)

$$= - + + - - -$$

• nützliche Rechenregeln:

$$\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{ilm} = \delta_{jl} \delta_{km} - \delta_{jm} \delta_{kl} \quad (2.27)$$

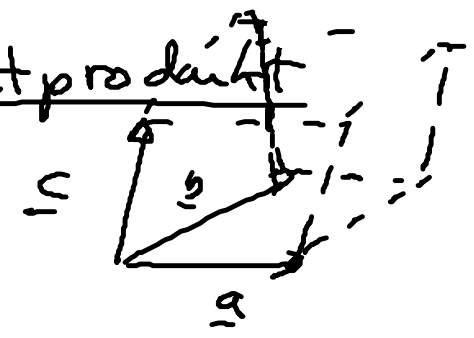
$$\underline{a} \times (\underline{b} \times \underline{c}) = \underline{b} (\underline{a} \cdot \underline{c}) - \underline{c} (\underline{a} \cdot \underline{b}) \quad (2.28)$$

Beweis: Übungen

2.4.3. Spatprodukt

• Def:

$$\underline{c} \cdot (\underline{a} \times \underline{b}) \quad (2.29)$$



$\hat{=}$ Volumen des Spates $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$

$\underline{c} \cdot (\underline{a} \times \underline{b}) > 0$, falls $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ Rechtssystem
 < 0 , " " " Linkssystem

→ zyklische Eigenschaften:

$$\underline{c} \cdot (\underline{a} \times \underline{b}) = \underline{a} \cdot (\underline{b} \times \underline{c}) = \underline{b} \cdot (\underline{c} \times \underline{a}) = - \underline{c} \cdot (\underline{b} \times \underline{a}) \quad (2.30)$$

• Pseudoskalar: Vorzeichenwechsel bei Raumspiegelung von $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ etc.

• in Komp:

$$\underline{c} \cdot (\underline{a} \times \underline{b}) = c_i a_j b_k \underbrace{\varepsilon_{ijk}}_{\varepsilon_{ijk} \quad (2.23)} = \varepsilon_{ijk} c_i a_j b_k \quad (2.31)$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$