physike = φυσικη

- Schein + Klausur = erfolgreiche Teilnahme

2.3 Euklidischer Vektorraum

- „Wie lang sind Vektoren?", „Welche Winkel schließen Vektoren ein?"
- **Def:** Ein euklidischer Vektorraum besteht aus einem reellen V und einem Skalarprodukt (inneres Produkt) $\underline{a}\cdot\underline{b} \in \mathbb{R}$ mit den Eigenschaften: (2.7)

  (A1) $\underline{a}\cdot\underline{b} = \underline{b}\cdot\underline{a}$ ... Symmetrie

  (A2) $\underline{a}\cdot\underline{a} \geq 0$

  (A3) $\underline{a}\cdot\underline{a} = 0 \Longleftrightarrow \underline{a} = 0$

  (A2), (A3): positive Definitheit

  (A4) $(p\underline{a})\cdot\underline{b} = p(\underline{a}\cdot\underline{b})$, $p \in \mathbb{R}$

  (A5) $(\underline{a}+\underline{b})\cdot\underline{c} = \underline{a}\cdot\underline{c} + \underline{b}\cdot\underline{c}$

  (A4), (A5): ... Linearität

- „ $\cdot$ " ... symmetrische (A1), positive-definite (A2/3), bilineare (A1/A4/A5) Abbildung: $V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$
- Länge, Betrag, Norm $\underline{a}$: $a = |\underline{a}| = \sqrt{\underline{a}\cdot\underline{a}}$ (2.8)
- $\underline{a}$ „senkrecht auf" ($\perp$) $\underline{b}$, falls $\underline{a}\cdot\underline{b} = 0$ (2.9)
- Geg: Basis $\{\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n\}$ in V $\longrightarrow$ Orthonormal Basis

  Def: $\underline{e}_i \cdot \underline{e}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i=j \text{ ... normiert, Einheitsvekt.} \\ 0, & i \neq j \text{ ... orthogonal} \end{cases}$ (2.10)

  δ_{ij}: Kronecker Symbol $(i,j = 1, \dots, n)$

Bem: Erzeugung von Orthonormal-Basis aus bel. Basis
$\longrightarrow$ Gram-Schmidtsches Orthonormierungs-Verf. $\longrightarrow$ Üb.

- Bsp 1: Vektoren für Physiker (s. 2.4)
- Bsp 2: $\mathbb{R}^n$: $\quad \underline{a}\cdot\underline{b} = a_1 b_1 + \ldots + a_n b_n \quad (2.11)$
- Bsp 3: $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$: $\quad \underline{\underline{A}}\cdot\underline{\underline{B}} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} A_{ij} B_{ij} \quad (2.12)$

mit transponierte Matrix $[\underline{\underline{B}}^t]_{ij} = B_{ji} \quad (2.13)$

$$\underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} | & | & | \\ 1 & 2 & 3 \\ | & | & | \end{pmatrix} \longrightarrow \underline{\underline{B}}^t = \begin{pmatrix} - & 1 & - \\ - & 2 & - \\ - & 3 & - \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{A}}\cdot\underline{\underline{B}} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} A_{ij}\,[\underline{\underline{B}}^t]_{ji} = Sp(\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}}^t) \quad (2.14)$$

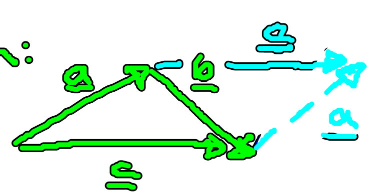
Spur der Matrix:
mit $[\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}}^t]_{ik} = \sum_j A_{ij} B^t_{jk}$

2.4 Vektoren für PhysikerInnen (im 3D)

(1) Vektor: Richtung & Länge (Bsp: Kraft, Geschw.)

$\underline{a} = |\underline{a}|\,\hat{\underline{a}}$ ← Einheitsvektor: Länge 1

(2) Addition:



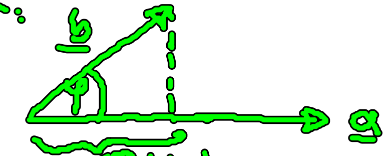
$$\underline{a} + \underline{b} = \underline{c} = \underline{b} + \underline{a} \quad (2.15)$$

intuitives Verständnis von Paralleltransport von Vektoren

(3) Multiplikation mit Skalar:

$$p\underline{a} = p|\underline{a}|\,\hat{\underline{a}} \quad (2.16)$$

(4) Skalarprodukt: $\underline{a} \cdot \underline{b} = |\underline{a}||\underline{b}| \cos\varphi$ (2.17)



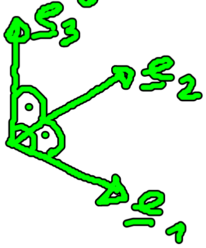
$\cos\varphi |\underline{b}|$

Projektion von $\underline{b}$ auf die Richtung von $\underline{a}$

(1)-(4): $\longrightarrow$ euklidischer Vektorraum, Beweis: Üb.

2.4.1. Orthonormal Basis

- (2.10) $\vec{\ }$ $\underline{e}_i \cdot \underline{e}_j = \delta_{ij}$ mit $i,j = 1,2,3$ (2.18)



Konvention: $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3\}$ ... Rechtssystem [Rechte-Hand-Regel]

- Darstellung eines Vektors:

$$\underline{a} = \sum_{i=1}^{3} a_i \underline{e}_i = a_i \underline{e}_i \quad , \quad a_k = \underline{a} \cdot \underline{e}_k \quad (2.19)$$

$(= a_i \underline{e}_i \cdot \underline{e}_k = a_i \delta_{ik} = a_k$ qed)

in Zukunft: Einsteinsche Summenkonvention
„Über doppelt vorkommende Indices wird summiert"

- Skalarprodukt in Komponenten:

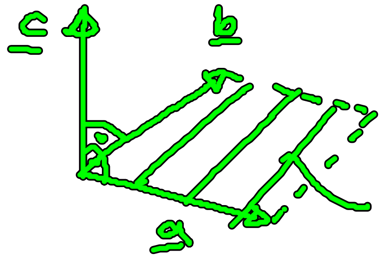
$$\boxed{\underline{a} \cdot \underline{b} = a_i b_j \underbrace{\underline{e}_i \cdot \underline{e}_j}_{\delta_{ij}} = a_i b_i} \quad (2.20)$$

Bilinearität

Standard-Skalarprodukt im $\mathbb{R}^n$

2.4.2. Vektorprodukt (äußeres Produkt)

• Geg: $\underline{a}, \underline{b}$



Fläche $= |\underline{c}|$

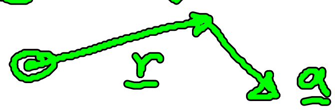
$$\boxed{\begin{array}{l} \underline{c} := \underline{a} \times \underline{b} \perp \underline{a}, \underline{b} \\ |\underline{c}| = |\underline{a}|\,|\underline{b}| \sin\varphi \\ \underline{a}, \underline{b}, \underline{c} \text{ bilden Rechtssystem/} \\ \text{-schraube} \end{array}} \quad (2.21)$$

$\longrightarrow$ $\underline{c}$ charakt. einen Drehsinn

• $\underline{c}$ ... axialer oder Pseudovektor:

Raumspiegelung: $\left.\begin{array}{l} \underline{a} \longrightarrow -\underline{a} \\ \underline{b} \longrightarrow -\underline{b} \end{array}\right\}$ aber $\underline{c} \longrightarrow \underline{c}$!

• Bsp: "Momente": bezogen auf Pkt. im Raum



$\longrightarrow \underline{r} \times \underline{a}$

(1) Drehimpuls eines Pkt. teilchens: $(\underline{a} = \underline{p})$

$$\underline{L} = \underline{r} \times \underline{p}$$

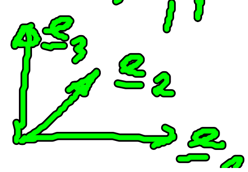
(2) Drehmoment: $\underline{a} = \underline{F} \longrightarrow \underline{M} = \underline{r} \times \underline{F}$

$\longrightarrow$ Mechanik

• Rechenregeln:
$$\left.\begin{array}{ll} (1) & \underline{a} \times \underline{b} = -\underline{b} \times \underline{a} \longrightarrow \underline{a} \times \underline{a} = \underline{0} \\ (2) & \underline{a} \times (\underline{b} + \underline{c}) = \underline{a} \times \underline{b} + \underline{a} \times \underline{c} \\ (3) & p\,\underline{a} \times \underline{b} = \underline{a} \times p\,\underline{b} = p\,(\underline{a} \times \underline{b}), \ p \in \mathbb{R} \end{array}\right\} (2.22)$$

• orthonormierte Basis, Rechtssystem:

$\underline{e}_i \times \underline{e}_i = \underline{0} \quad , i = 1,2,3$



$$\underline{e}_1 \times \underline{e}_2 = \underline{e}_3$$
$$\left.\begin{aligned}\underline{e}_2 \times \underline{e}_3 &= \underline{e}_1\\ \underline{e}_3 \times \underline{e}_1 &= \underline{e}_2\end{aligned}\right\}\text{zykl. Vertauschung}$$

mit

$$\boxed{\underline{e}_i \times \underline{e}_j = \varepsilon_{ijk}\,\underline{e}_k} \qquad (2.23)$$

$$\boxed{\varepsilon_{ijk} := \begin{cases} 1 & \text{für } \varepsilon_{123} \\ 1 & \text{" alle geraden Permutationen von 123} \\ -1 & \text{" alle ungeraden Permutationen von 123} \\ 0 & \text{sonst, d.h. mind. 2 Indizes gleich} \end{cases}} \qquad (2.24)$$

... vollständig antisymmetrische oder Levi-Civita-Tensor

Bsp: $\varepsilon_{123} \xrightarrow{\text{ungerade}} \varepsilon_{213} \longrightarrow \varepsilon_{312}$, $\varepsilon_{123} \xrightarrow{\text{gerade}} \varepsilon_{312}$

- $\underline{a} \times \underline{b}$ in Komp:

$$\underline{a} \times \underline{b} = (a_i \underline{e}_i) \times (b_j \underline{e}_j) \underset{(2.22)}{=} a_i b_j\, \underline{e}_i \times \underline{e}_j$$

$$\longrightarrow \quad \boxed{\underline{a} \times \underline{b} \underset{(2.23)}{=} \underbrace{\varepsilon_{kij}\, a_i b_j}_{(\underline{a} \times \underline{b})_k}\, \underline{e}_k} \qquad 2.25$$

- Merkregel:

$$\underline{a} \times \underline{b} = \begin{vmatrix} \underline{e}_1 & \underline{e}_2 & \underline{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \begin{matrix} - \\ + \end{matrix} \qquad (2.26)$$

$|\ldots|$ ... Determinante (s. später)

$= \_ + \_ + \_ - \_ - \_ - \_$

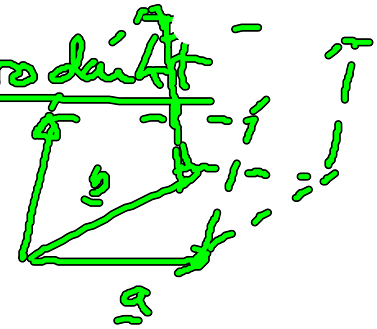
- nützliche Rechenregeln:

$$\varepsilon_{ijk}\,\varepsilon_{ilm} = \delta_{jl}\,\delta_{km} - \delta_{jm}\,\delta_{kl} \quad (2.27)$$

$$\underline{a} \times (\underline{b} \times \underline{c}) = \underline{b}\,(\underline{a}\cdot\underline{c}) - \underline{c}\,(\underline{a}\cdot\underline{b}) \quad (2.28)$$

Beweis: Übungen

2.4.3. Spatprodukt



- Def: $\boxed{\underline{c}\cdot(\underline{a}\times\underline{b})}$ (2.29)

$\hat{=}$ Volumen des Spates $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$

$\underline{c}\cdot(\underline{a}\times\underline{b}) > 0$, falls $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ Rechtssystem

< 0, " " Linkssystem

$\longrightarrow$ zyklische Eigenschaften: (2.30)

$$\underline{c}\cdot(\underline{a}\times\underline{b}) = \underline{a}\cdot(\underline{b}\times\underline{c}) = \underline{b}\cdot(\underline{c}\times\underline{a}) = -\underline{c}\cdot(\underline{b}\times\underline{a})$$

etc.

- Pseudoskalar: Vorzeichenwechsel bei Raumspiegelung von $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$

- in Komp:

$$\underline{c}\cdot(\underline{a}\times\underline{b}) = c_i\,a_j\,b_k\,\underbrace{\underline{e}_i\cdot(\underline{e}_j\times\underline{e}_k)}_{\varepsilon_{ijk}\ (2.23)} = \varepsilon_{ijk}\,c_i\,a_j\,b_k \quad (2.31)$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$