

## 2.14 Drehungen/Spiegelungen

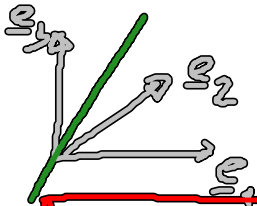
- Probleme: (1) Beschreibe Drehungen/Spiegelungen von  $\underline{a} \in V$   
(2) Darstellung von  $\underline{a}$  bzgl. neuer ONBasis
  - starrer Körper (Klass. Mechanik)
  - Symmetrie betrachtungen  
(Eigene Wigner)

• Zuerst:

ONB (Orthonormalbasis):

$$\{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3\} \xrightarrow[\text{Spiegelung}]{\text{Drehung um bel. Achse}} \{\underline{e}'_1 = D_{11}\underline{e}_1, \underline{e}'_2, \underline{e}'_3\}$$

↳ gedrehtes  $\underline{e}_1$



$$\underline{e}'_i = D_{ij} \underline{e}_j \quad \text{mit} \quad D_{ij} = \underline{e}'_i \cdot \underline{e}_j = \cos \angle(\underline{e}'_i, \underline{e}_j) \quad (2.32)$$

- Eigenschaften der "Drehmatrix"  $D_{ij}$  ( $\in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ )

Winkel- und Normerhaltung (Isometrie)

$$\underline{e}'_i \cdot \underline{e}'_j = \delta_{ij} = (D_{ik} \underline{e}_k) \cdot (D_{jl} \underline{e}_l) =$$

$$= D_{ik} D_{jl} \underbrace{e_k \cdot e_l}_{\delta_{kl}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} D_{ik} D_{jk} &= \delta_{ij} \\ \underline{D} \underline{D}^t &= \underline{1} \\ \underline{D}^t &= \underline{D}^{-1} \end{aligned}} \quad (2.33)$$

... orthogonale Matrix  $\in O(3)$

(nicht kommutative Gruppe aller Drehungen & Spiegelungen)

Bem 1: Schreibweise:  $(\underline{AB})_{ik} = A_{ij} B_{jk}$ ! (2.34)

Matrizenmultiplikation

$$\begin{pmatrix} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ | & | & | \\ | & | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{1j} B_{j1} & A_{1j} B_{j2} & \dots \\ \underline{A} & \underline{B} & \underline{AB} \end{pmatrix}$$

Bem 2:  $\underline{D}^{-1}$  ... macht Drehung  $\underline{D}$  rückgängig = zu  $\underline{D}$  invers

• "Konstruktion":  $\underline{D} = \begin{pmatrix} [e'_1] \\ [e'_2] \\ [e'_3] \end{pmatrix} = [e'_1 \cdot e_1, e'_1 \cdot e_2, e'_1 \cdot e_3]$  (2.35)

• Problemlösung:

(1) Drehung / Spiegelung von  $\underline{a}$ :  $\underline{a} \rightarrow \underline{D}\underline{a}$ ,  $\underline{a} = a_i \cdot e_i$   
 Darstellung in  $\{e_i\}$ :  $\underline{D}\underline{a} = a_i \cdot e'_i \stackrel{(2.32)}{=} a_i \cdot D_{ij} \cdot e_j$

$$\rightarrow \boxed{\begin{aligned} [D\underline{a}]_j &= a_i \cdot D_{ij} \\ &= D_{ji}^t a_i \end{aligned}} \quad (2.36)$$

"aktiver" Standpunkt

(2)  $\underline{a}$  in neuer Basis:  $\underline{a} = a_j \underline{e}_j = a'_i \underline{e}'_i$

→ Trf. von Vektorkomp.

$$a'_i = \underline{e}'_i \cdot \underline{a} = \underline{e}'_i \cdot \underbrace{e_j a_j}_{D_{ij}}$$

$$\begin{cases} a'_i = D_{ij} a_j \\ a_j = D_{ij}^t a'_i \end{cases}$$

"passive" Standpkt

NR:

$$(2.37) \quad \underline{D}^{-1} \mid a'_i = D_{ij} a_j$$

$$D_{ki}^t a'_i = D_{ki}^{-1} D_{ij} a_j$$

$$D_{ki}^t a'_i = a_k$$

$k \rightarrow i$   
 $i \rightarrow j$

Schreibweise:

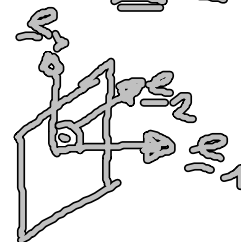
$\underline{a} \in \mathbb{R}^n$  Vektor im Raum

$$\underline{a} \xrightarrow{(2.37)} \underline{a}' = \begin{pmatrix} a'_1 \\ a'_2 \\ a'_3 \end{pmatrix} \stackrel{(2.37)}{=} \underline{D} \underline{a} \quad (2.38)$$

• Bsp. 1: Spiegelung an Ebene  $\perp \underline{e}_1$

$$\rightarrow \underline{e}'_1 = -\underline{e}_1, \underline{e}'_2 = \underline{e}_2, \underline{e}'_3 = \underline{e}_3$$

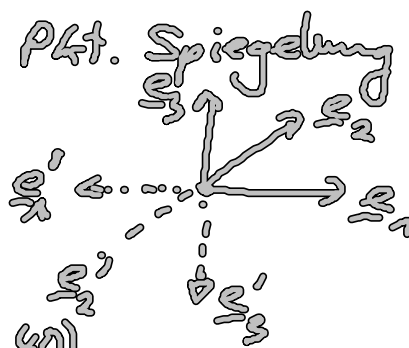
$$\rightarrow \underline{D} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



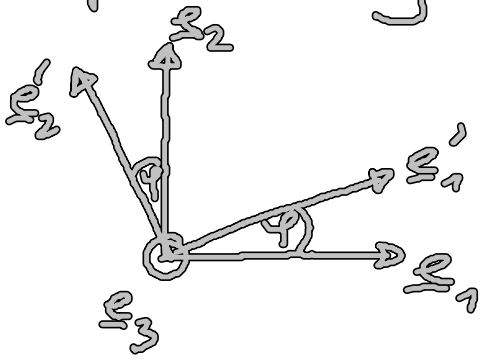
• Bsp 2: "Raumspiegelung" = Pkt. Spiegelung am "Ursprung"

$$\rightarrow \underline{e}'_i = -\underline{e}_i$$

$$\rightarrow \underline{D} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2.40)$$



• Bsp 3: Drehung um  $e_3$  ( $z$ -Achse):



$$\underline{D}(e_3, \varphi) = [e'_i \cdot e_j]$$

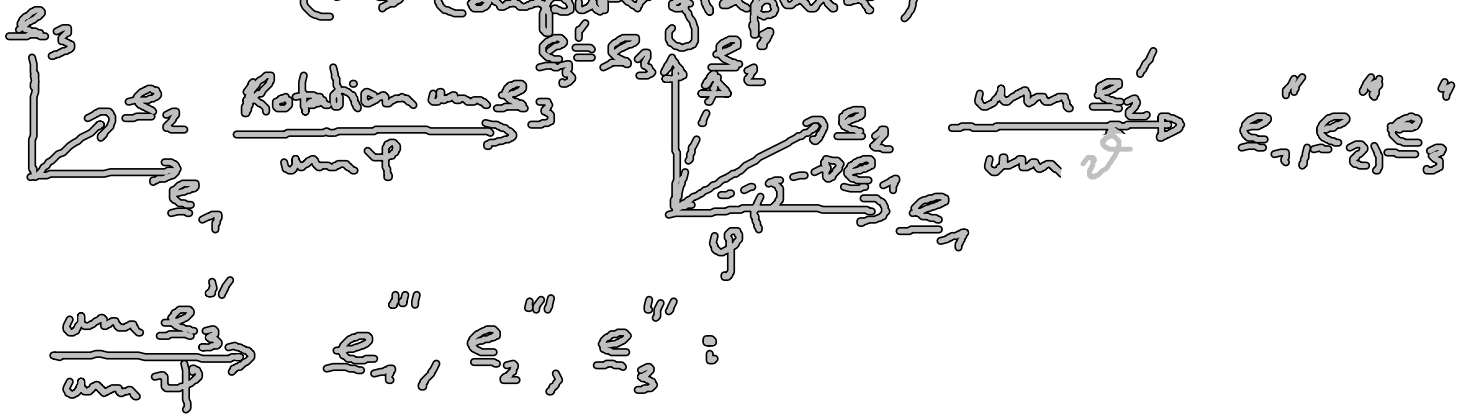
$$= \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} e'_i \text{ in } \{e_1\} \\ \end{matrix} \quad (2.41)$$

• Bsp 4: Eulersche Winkel (verschiedene Konv.)

→ allg. Orientierung von  $e' = D e$ :

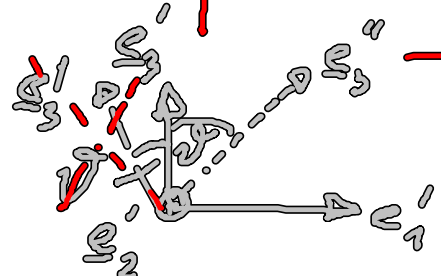
→ starrer Körper / klass. Mechanik

(→ Computergraphik)



$$\underline{D}(\varphi, \vartheta, \psi) = \underline{D}(e_3, \varphi) \underline{D}(e'_1, \vartheta) \underline{D}(e''_3, \psi) \quad (2.42)$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\text{in } \{e_i\}} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{\text{in } \{e'_i\}} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{\text{in } \{e''_i\}}$



→ allg. Drehung / Spiegelung: 3 Winkel