

• Händigkeit:

Drehungen: Rechtssystem \rightarrow Rechtssystem:

$$\underline{e}'_3 \cdot (\underline{e}'_1 \times \underline{e}'_2) = 1 \stackrel{(2.31)}{=} \begin{vmatrix} \underline{e}'_1 \cdot \underline{e}'_1 & \underline{e}'_1 \cdot \underline{e}'_2 & \underline{e}'_1 \cdot \underline{e}'_3 \\ \underline{e}'_2 \cdot \underline{e}'_1 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$$

$$= |\underline{D}| = \boxed{\det \underline{D} = 1}$$

$\rightarrow \underline{D} \in SO(3)$... eigentlich orthogonale Matrizen (2.43)

Spiegelungen: Rechtssystem \rightarrow Linkssystem:

$$\underline{e}'_3 \cdot (\underline{e}'_1 \times \underline{e}'_2) = \boxed{-1 = \det \underline{D}}$$

• $\underline{D} \in O(3)$... Punktoperationen
wichtig zur Klassifizierung
der Kristalle

2.5 Erweiterungen

• für V über \mathbb{C} : Verallgemeinerung

Def: Unitärer Vektorraum =

komplexer V \mathbb{R} (hermitesches)

Skalarprodukt $\underline{a} \cdot \underline{b} \in \mathbb{C}$ mit

$$(A1') \quad \underline{a} \cdot \underline{b} = (\underline{b} \cdot \underline{a})^* \quad \dots \text{hermitesch} \quad (2.44)$$

$$(A2) \quad \underline{a} \cdot \underline{a} \geq 0 \quad \left. \begin{array}{l} (A2) \\ (A3) \end{array} \right\} \text{s. (2.7)}$$

$$(A3) \quad \underline{a} \cdot \underline{a} = 0 \iff \underline{a} = \underline{0}$$

$$(A4') \quad (p\underline{a}) \cdot \underline{b} = p^* (\underline{a} \cdot \underline{b}), \quad p \in \mathbb{C} \quad \left. \begin{array}{l} (A4') \\ (A5) \end{array} \right\} \text{semi linear}$$

$$(A5) \quad (\underline{a} + \underline{b}) \cdot \underline{c} = \underline{a} \cdot \underline{c} + \underline{b} \cdot \underline{c} \quad \text{s. (2.7)} \quad \left. \begin{array}{l} (A4') \\ (A5) \end{array} \right\} \text{im 1. Argument}$$

insbesondere: $\underline{a} \cdot p\underline{b} \stackrel{(A1')}{=} (p\underline{b} \cdot \underline{a})^* \stackrel{(A4')}{=} [p^*(\underline{b} \cdot \underline{a})]^* = p(\underline{b} \cdot \underline{a})^*$
 $\stackrel{(A1')}{=} p(\underline{a} \cdot \underline{b}) \dots \text{linear im 2. Argument} \quad (2.45)$

• " " ... hermitesch (A1'), positiv-definit (A2/3),
sesquilineare (A1', A4', A5) Abbildung: $V \times V \rightarrow \mathbb{C}$

• Schreibweise: $\underline{a} \cdot \underline{b} = (\underline{a}, \underline{b}) = \langle \underline{a} | \underline{b} \rangle \quad (2.46)$

• Bsp: \mathbb{C}^n : $\underline{a} \cdot \underline{b} = a_1^* b_1 + \dots + a_n^* b_n$ QM: "Bracket"

• Def:

Prähilbertraum $P = V$ mit hermiteschem
Skalarprodukt
 $P \rightarrow V$ über \mathbb{R} : euklidisch (2.48)
 $\rightarrow V$ über \mathbb{C} : unitär

Def: Hilbertraum $H =$ vollständiger Prähilbertraum P

↳ alle Grenzwerte von Cauchy-Folgen $\in P$ (2.13)

Bsp: rationale Zahlen \mathbb{Q} : nicht vollständig
 reelle " \mathbb{R} : vollständig

$\left. \begin{matrix} \pi \times 3 \\ \times 3,1 \\ \times 3,14 \\ \vdots \end{matrix} \right\} \mathbb{Q}$

• Anwendung, QM: Hilbertraum "gutartiger" Funktionen aber: $\pi \notin \mathbb{Q}$!

Bsp: Legendre Polynome $P_\ell(x)$, $|x| \leq 1$
 $\{1, x, x^2, \dots\}$... Basis im Raum der Polynome

Orthogonalisierere $P_\ell(x)$ [s. Übungen]

NB: $|x| = |\cos \vartheta| \leq 1 \rightarrow$ QM

3. Einschub: Matrizen (Details s.HM)

• Elemente von ~~$\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$~~ $\mathbb{R}^{n \times m}$ • $\underline{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & \dots & A_{nm} \end{pmatrix}$ $A_{ij} = [\underline{A}]_{ij}$ (3.1)

NB: Verallgemeinerung auf $\mathbb{C}^{n \times m}$ möglich

• Vektorraum über \mathbb{R} bzgl. Addition [s. 2.1]

• transponierte Matrix: $\underline{\underline{A}}^t$ von $\underline{\underline{A}} \in \mathbb{R}^{n \times n}$

Komponenten: $[\underline{\underline{A}}^t]_{ij} = A_{ji}$ (3.2)

Matrix:

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{1k} & \dots & A_{1n} \\ \vdots & & & & \vdots \\ A_{k1} & & & & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots \\ A_{n1} & \dots & \dots & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Spiegelung an Diagonalen}} \underline{\underline{A}}^t = \begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{k1} & \dots & A_{n1} \\ \vdots & & & & \vdots \\ A_{1k} & & & & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots \\ A_{n1} & \dots & \dots & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

Spiegelung an Diagonalen

Bsp 1: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

Bsp 2: Verallg. auf $\mathbb{R}^{n \times m}$ möglich:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

Regel: $\boxed{(\underline{\underline{A}} \ \underline{\underline{B}})^t = \underline{\underline{B}}^t \ \underline{\underline{A}}^t}$ (3.3) \rightarrow Übungen

• Def: $\boxed{\text{Spur von } \underline{\underline{A}} = \text{Sp } \underline{\underline{A}} = A_{ii}}$, $\underline{\underline{A}} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ (3.4)

Regel: $\boxed{\text{Sp}(\underline{\underline{A}} \ \underline{\underline{B}}) = A_{ij} B_{ji} = B_{ji} A_{ij} = \text{Sp}(\underline{\underline{B}} \ \underline{\underline{A}})}$ (3.5)

3.1 Matrixmultiplikation

• Spezialfälle:

(i) $n=m$: $\underline{A}, \underline{B} \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$$\begin{aligned} \underline{A} \underline{B} &= \underline{C} \in \mathbb{R}^{n \times n} \\ A_{ij} B_{jk} &= C_{ik} \\ i \left(\begin{array}{c} \text{---} \\ \underline{A} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} k \\ | \\ \underline{B} \end{array} \right) &= i \left(\begin{array}{c} k \\ | \\ C_{ik} \\ | \\ \underline{C} \end{array} \right) \quad (3.6) \end{aligned}$$

Bsp: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 7 & 14 \end{pmatrix}$

(ii) $\underline{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\underline{b} \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} \underline{A} \underline{b} &= \underline{c} \in \mathbb{R}^n \\ A_{ij} b_j &= c_i \\ i \left(\begin{array}{c} \text{---} \\ \underline{A} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} | \\ \underline{b} \end{array} \right) &= \left(\begin{array}{c} c_i \end{array} \right) \quad (3.7) \end{aligned}$$

Bsp: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$

• allgemein: $\underline{A} \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $\underline{B} \in \mathbb{R}^{m \times r}$
 $\underline{A} \underline{B} = \underline{C} \in \mathbb{R}^{n \times r} \quad (3.8)$

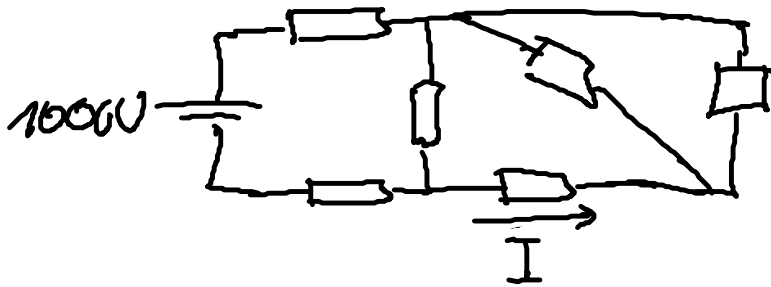
$$\underline{A} \underline{x} = \underline{b}$$

$$A_{ij} x_j = b_i$$

$\underline{b} = 0 \dots$ homogenes Gl. system

$\underline{b} \neq 0 \dots$ inhomogenes "

- Anwendung: (i) Eigenvektoren von Matrizen/Tensoren
[s. 4. Kap.]
(ii) elektr. Netzwerke



Bestimme
Ströme durch