- Händigkeit:

Drehungen: Rechtssystem $\to$ Rechtssystem:

$$\underline{e}_3' \cdot (\underline{e}_1' \times \underline{e}_2') = 1 \underset{(2.31)}{=} \begin{vmatrix} \underline{e}_1' \cdot \underline{e}_1 & \underline{e}_1' \cdot \underline{e}_2 & \underline{e}_1' \cdot \underline{e}_3 \\ \underline{e}_2' \cdot \underline{e}_1 & \dots & \\ \dots & & \end{vmatrix}$$

$$= |\underline{\underline{D}}| = \boxed{\det \underline{\underline{D}} = 1} \quad (2.43)$$

$\to \underline{\underline{D}} \in SO(3)$ ... eigentlich orthogonalen Matrizen

Spiegelungen: Rechtssystem $\to$ Linkssystem:

$$\underline{e}_3' \cdot (\underline{e}_1' \times \underline{e}_2') = \boxed{-1 = \det \underline{\underline{D}}}$$

- $\underline{\underline{D}} \in O(3)$ ... Punktoperationen wichtig zur Klassifizierung der Kristalle

2.5 Erweiterungen

- für V über $\mathbb{C}$: Verallgemeinerung

Def.: Unitärer Vektorraum =

komplexer V R (hermitesches) Skalarprodukt $\underline{a}\cdot\underline{b} \in \mathbb{C}$ mit

$$\begin{aligned}
&(A1') \quad \underline{a}\cdot\underline{b} = (\underline{b}\cdot\underline{a})^* \quad \ldots \text{ hermitesch} && (2.44)\\
&(A2) \quad \underline{a}\cdot\underline{a} \geq 0 \\
&(A3) \quad \underline{a}\cdot\underline{a} = 0 \longleftrightarrow \underline{a} = \underline{0} && \Big\} (2.7)\\
&(A4') \quad (p\underline{a})\cdot\underline{b} = p^*(\underline{a}\cdot\underline{b}) \quad , p \in \mathbb{C} \\
&(A5) \quad (\underline{a}+\underline{b})\cdot\underline{c} = \underline{a}\cdot\underline{c} + \underline{b}\cdot\underline{c} \quad \text{s. } (2.7) && \Big\} \text{ \underline{semi} linear im 1. Argument}
\end{aligned}$$

insbesondere: $\underline{a}\cdot p\underline{b} \overset{(A1')}{=} (p\underline{b}\cdot\underline{a})^* \overset{(A4')}{=} [p^*(\underline{b}\cdot\underline{a})]^* = p(\underline{b}\cdot\underline{a})^* \overset{(A1')}{=} p(\underline{a}\cdot\underline{b}) \ldots$ linear im 2. Argument (2.45)

- „$\cdot$" ... hermitesche (A1'), positiv-definite (A2/3), sesquilineare (A1', A4', A5) Abbildung: $V \times V \rightarrow \mathbb{C}$
- Schreibweise: $\underline{a}\cdot\underline{b} = (\underline{a},\underline{b}) = \underbrace{\langle \underline{a} | \underline{b} \rangle}_{\text{QM: „Bracket"}}$ (2.46)
- Bsp: $\mathbb{C}^n$: $\underline{a}\cdot\underline{b} = a_1^* b_1 + \ldots + a_n^* b_n$
- **Def:** Prähilbertraum P = V mit hermiteschen Skalarprodukt (2.48)

$$P \begin{cases} \nearrow V \text{ über } \mathbb{R}: \text{ euklidisch} \\ \searrow V \text{ über } \mathbb{C}: \text{ unitär} \end{cases}$$

· **Def:** $\boxed{\text{Hilbertraum } H = \underline{\text{vollständiger}} \text{ Prähilbertraum } P}$

↳ alle Grenzwerte von Cauchy-Folgen $\in P$ (2.15)

Bsp: rationale Zahlen $\mathbb{Q}$: nicht vollständig $\pi \approx 3$, $\approx 3{,}1$, $\approx 3{,}14$, ⋮ $\} \mathbb{Q}$

reelle " $\mathbb{R}$: vollständig

aber: $\pi \notin \mathbb{Q}$!

· Anwendung: QM: Hilbertraum "gutartiger" Funktionen

Bsp: Legendre Polynome $P_\ell(x)$, $|x| \leq 1$

$\{1, x, x^2, \ldots\}$ ... Basis im Raum der Polynome

$\xrightarrow[\text{nalisiere}]{\text{Orthogo-}}$ $P_\ell(x)$ [s. Übungen]

NB: $|x| = |\cos\vartheta| \leq 1 \longrightarrow$ QM

3. Einschub: Matrizen (Details s. HM)

· Elemente von $\cancel{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m}$ $\mathbb{R}^{n\times m}$: $\underline{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1m} \\ \vdots & & \\ A_{n1} & \cdots & A_{nm} \end{pmatrix}$ $A_{ij} = [\underline{A}]_{ij}$ (3.1)

NB: Verallgemeinerung auf $\mathbb{C}^{n\times m}$ möglich

· Vektorraum über $\mathbb{R}$ bzgl. Addition [s. 2.1]

• transponierte Matrix: $\underline{\underline{A}}^t$ von $\underline{\underline{A}} \in \mathbb{R}^{n\times n}$

$$\boxed{\text{Komponenten: } \quad [\underline{\underline{A}}^t]_{ij} = A_{ji} \qquad (3.2)}$$

!

Matrix:

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1k} & \cdots & A_{1n} \\ \vdots & \ddots & & & \vdots \\ A_{k1} & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & \cdots & & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} \longrightarrow \underline{\underline{A}}^t = \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{k1} & \cdots & A_{n1} \\ \vdots & & & & \\ A_{1k} & & & & \\ \vdots & & & & \\ A_{1n} & - & - & - & A_{nn} \end{pmatrix}$$

Spiegelung an Diagonalen

Bsp: 1: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

Bsp2: Verallg. auf $\mathbb{R}^{n\times m}$ möglich:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

Regel: $\boxed{(\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}})^t = \underline{\underline{B}}^t \underline{\underline{A}}^t}$ (3.3) $\longrightarrow$ Übungen

• Def: $\boxed{\text{Spur von } \underline{\underline{A}} = Sp\,\underline{\underline{A}} = A_{ii}}$, $\underline{\underline{A}} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ (3.4)

Regel: $\boxed{Sp(\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}}) = A_{ij} B_{ji} = B_{ji} A_{ij} = Sp(\underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{A}})}$ (3.5)

3.1 Matrixmultiplikation

- Spezialfälle:

(i) $n=m$: $\quad \underline{\underline{A}}, \underline{\underline{B}} \in \mathbb{R}^{n\times n}$

$$\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}} = \underline{\underline{C}} \quad \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

$$A_{ij}\,B_{jk} = C_{ik}$$

$$\underset{\underline{\underline{A}}}{i\begin{pmatrix} - & - & - \end{pmatrix}}\ \underset{\underline{\underline{B}}}{\begin{pmatrix} \overset{k}{|} \\ | \\ | \end{pmatrix}} = \underset{\underline{\underline{C}}}{i\begin{pmatrix} & \overset{k}{|} & \\ - \ - & C_{ik} & - \\ & | & \end{pmatrix}} \qquad (3.6)$$

Bsp.: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 7 & 14 \end{pmatrix}$

(ii) $\underline{\underline{A}} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\quad \underline{b} \in \mathbb{R}^{n}$

$$\underline{\underline{A}}\,\underline{b} = \underline{c} \quad \in \mathbb{R}^{n}$$

$$A_{ij}\,b_j = c_i \qquad (3.7)$$

$$\underset{\underline{\underline{A}}}{i\begin{pmatrix} - & - & - \end{pmatrix}}\ \underset{\underline{b}}{\begin{pmatrix} | \\ | \\ | \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} c_i \\ \\ \end{pmatrix}$$

Bsp.: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$

- allgemein: $\quad \underline{\underline{A}} \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $\quad \underline{\underline{B}} \in \mathbb{R}^{m\times r}$

$$\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}} = \underline{\underline{C}} \in \mathbb{R}^{n\times r} \qquad (3.8)$$

$A_{ij} B_{jk} = C_{ik}$

- $\boxed{\begin{array}{l} \mathbb{R}^{n\times n} \text{ ... Gruppe bzgl. Multiplikation} \\ \text{(A1)}\quad \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}} \in \mathbb{R}^{n\times n} \text{ ... abgeschlossen} \\ \text{(A2)}\quad \underline{\underline{A}}(\underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{C}}) = (\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}})\underline{\underline{C}} \text{ ... assoziativ} \\ \qquad A_{ij}(B_{jk}C_{kl}) = (A_{ij}B_{jk})C_{kl} \\ \text{(A3)}\quad \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{1}} = \underline{\underline{A}} \text{ ... neutrales Element} \\ \qquad A_{ij}\delta_{jk} = A_{ik} \\ \text{(A4)}\quad \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{A}}^{-1} (= \underline{\underline{A}}^{-1}\underline{\underline{A}}) = \underline{\underline{1}} \text{ ... inverses Element} \\ \qquad A_{ij}A^{-1}_{jk} = \delta_{jk} \end{array}}$ (3.9)

$$\underline{\underline{1}} = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

- Achtung: i.a. $\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}} \neq \underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{A}}$ (3.10)

  QM: Kommutator: $(\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}} - \underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{A}}) = [\underline{\underline{A}}, \underline{\underline{B}}] \neq 0$
  $= 0$

3.2 Lineare Gleichungssysteme & Determinanten (Details s. HM)

Geg: Koeffizientenmatrix $\underline{\underline{A}} \in \mathbb{R}^{n\times m}$ und Spaltenvektor $\underline{b} \times \mathbb{R}^n$

Ges: Spaltenvektor $\underline{x} \in \mathbb{R}^m$, so daß (3.11)

$$\underline{\underline{A}}\,\underline{x} = \underline{b}$$

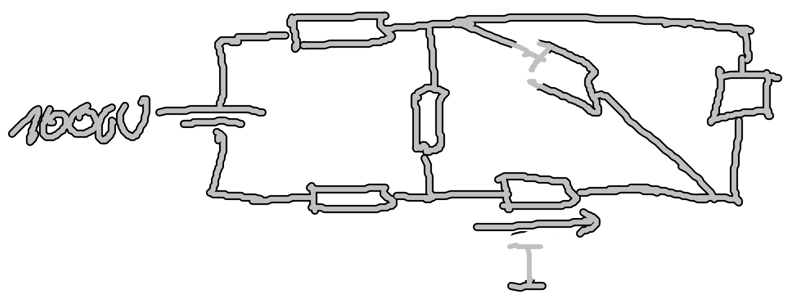
$$A_{ij}\, x_j = b_i$$

$\underline{b} = 0$ ... homogenes Gl. system

$\underline{b} \neq 0$ ... inhomogenes "

• Anwendung: (i) Eigenvektoren von Matrizen/Tensoren [s. 4. Kap.]

(ii) elektr. Netzwerke



Bestimme Ströme durch