3.2 Lineare Gl. systeme & Determinanten

- LGS: $\underline{\underline{A}}\,\underline{x} = \underline{b}$, $\underline{\underline{A}} \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $\underline{b} \in \mathbb{R}^n$, $\underline{x} \in \mathbb{R}^m$

  $\underline{b}=0$ ... hom. Gl. system

  $\underline{b}\neq 0$ ... inhom. "

- Fragen: (i) existiert $\underline{x}$?

  (ii) ist eindeutig?

Bsp: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\longrightarrow$ x_1, x_2 existiert nicht

$\longleftarrow$ $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ nicht vollst. Basis in $\mathbb{R}^3$

- Spezialfälle: $\underline{\underline{A}} \in \mathbb{R}^{n\times n}$

  (i) $n=2$: $\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ (3.12)

  für bel. $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ nur lösbar, falls $\begin{pmatrix} A_{11} \\ A_{21} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} A_{12} \\ A_{22} \end{pmatrix}$ linear unabhängig (l.u.)

Def: Determinante von $\underline{\underline{A}} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$:

$$\det \underline{\underline{A}} = |\underline{\underline{A}}| = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix} = \underline{A_{11}A_{22}} - \underline{A_{12}A_{21}} \quad (3.13)$$

NB: $\det \underline{\underline{A}}$ ... Fläche, die von $\begin{pmatrix} A_{11} \\ A_{21} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} A_{12} \\ A_{22} \end{pmatrix}$ als Trapez eingeschlossen wird

Beweis: $\longrightarrow$ Spezialfall von $n=3$

$\longrightarrow$ (3.12) $\det \underline{\underline{A}}\, x_1 = b_1 A_{22} - b_2 A_{12}$

$\det \underline{\underline{A}}\, x_2 = b_2 A_{11} - b_1 A_{21}$

$\longrightarrow$ $\underline{b}=0$: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ eindeutig, falls $\det \underline{\underline{A}} \neq 0$

$\underline{b}\neq 0$: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ existiert " , " "

(ii) $n=3$:

$$\begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{13} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{31} & \cdots & A_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \quad (3.14)$$

$$\longrightarrow \det \underline{\underline{A}}\, x_i = c_i(b_k A_{lm})$$

Def: Determinante von $\underline{\underline{A}} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$

$$\det \underline{\underline{A}} := \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix}$$

$$= \varepsilon_{ijk} A_{1i} A_{2j} A_{3k}$$

$$\overset{\text{o.B.}}{=} \varepsilon_{ijk} A_{i1} A_{j2} A_{k3}$$

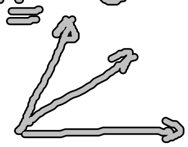
$$= \_ + \_ + \_ - \_ - \_ - \_$$

... Sarrusche Regel

Spatprodukt der Zeilenvektoren! (s. 2.31)

Spaltenvektoren!

$\det \underline{\underline{A}} = 0$



in einer Ebene

also: $\det \underline{\underline{A}} \neq 0 \longrightarrow$ Spalten/Zeilenvekt. l.u.

$\longrightarrow \underline{x} = \underline{\underline{A}}^{-1} \underline{b}$ eindeutig

$\longrightarrow \underline{\underline{A}}^{-1}$ existiert

$\underline{x} = 0$ für $\underline{b} = 0$ (3.16)

$\underline{\underline{A}}^{-1} \mid \underline{\underline{A}}\,\underline{x} = \underline{b}$

$\underline{\underline{1}}\,\underline{x} = \underline{\underline{A}}^{-1} \underline{b}$

$\underline{x} = \underline{\underline{A}}^{-1} \underline{b}$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Berechnung von $\underline{x} = \underline{\underline{A}}^{-1} \underline{b}$: Cramersche Regel

$\longrightarrow \underline{\underline{A}}^{-1}$

(iii) allgemeines n: (3.16) gilt mit

$$\det \underline{\underline{A}} = \sum_{\text{alle } p} v(p)\, A_{i_1 1} A_{i_2 2} \cdots A_{i_n n}$$

$p = (i_1\ i_2, \dots i_n)$ ... Permutation von $(1\ 2 \dots n)$

$$v(p) = \begin{cases} 1 & \text{für } (1\ 2 \dots n) \text{ und gerade Permutationen} \\ -1 & \text{" ungerade Permutation} \end{cases}$$

Bsp:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

... „Verallgemeinerung des Spatprodukts"

NB: Gruppe der $n \times n$ Matrizen bzgl. Matrix-multiplikation (3.9) enthält nur invertierbare Matrizen! $\underline{\underline{A}}^{-1}\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{1}}$

• Regeln für Determinante:

4. Tensoren 2. Stufe

4.1. Einordnung

Tensor 0. Stufe ≙ Skalar

" 1. Stufe ≙ Vektor $\underline{a} \in V$, $\underline{a} = a_i \underline{e}_i$ mit $\{\underline{e}_i\}$ ... ONB

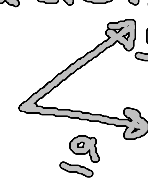
" 2. Stufe

4.2. Definitionen & dyadisches Produkt

• Def: Tensoren 2. Stufe vermitteln eine lineare Abbildung des Vektorraums V in sich:

$$\underline{\underline{T}} : \quad V \longrightarrow V$$

$$\underline{\underline{T}} : \quad \underline{a} \longrightarrow \underline{b} := \underline{\underline{T}}\,\underline{a} \quad , \quad \underline{a}, \underline{b} \in V \qquad (4.1)$$



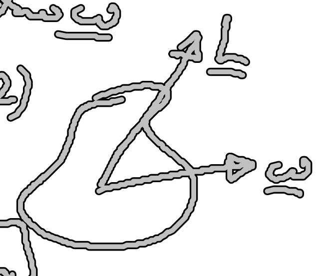
Linearität: $\underline{\underline{T}}(p\underline{a} + q\underline{b}) = p\underline{\underline{T}}\,\underline{a} + q\underline{\underline{T}}\,\underline{b}$, $p, q \in \mathbb{R}$

• Bsp 1: starrer Körper mit Winkelgeschw. $\underline{\omega}$

$\longrightarrow$ Drehimpuls: $\underline{L} = \underline{\underline{\Theta}}\,\underline{\omega}$ (4.2)

$\underline{\underline{\Theta}}$ ... Trägheitstensor

vgl. $\underline{p} = m\underline{v}$! [Übungen]



- **Bsp 2:** QM: lineare Abbildungen von Fkt.

$$\left.\begin{aligned} \hat{H} &: V \longrightarrow V \\ f(x) &\longrightarrow g(x) = \hat{H} f(x) \end{aligned}\right\} \quad (4.2b)$$

Bezeichnung: $\hat{H}$ ... Operator (statt Tensor)

Bsp: $\hat{H} f(x) = x f(x)$

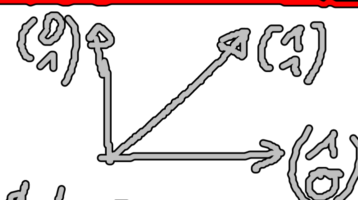
$\hat{H} f(x) = \frac{\partial}{\partial x} f(x)$ [→ Übungen]

- Komponenten von $\underline{\underline{T}}$ bzgl. Basis in V: (→ Rechnen!)

(1) allgemein: sei $\{\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_n\}$ Basis in V

$$\longrightarrow \boxed{\underline{\underline{T}}\,\underline{u}_j = \underline{u}_i T_{ij}} \quad (4.3)$$

mit $\underline{a} = a_j \underline{u}_j$: $\boxed{\underline{\underline{T}}\,\underline{a} \underset{(4.1)}{=} a_j \underline{\underline{T}}\,\underline{u}_j \underset{(4.3)}{=} \underline{u}_i \underbrace{T_{ij} a_j}}$ (4.4)



$(\underline{\underline{T}}\,\underline{a})_i$

Bsp 1: $\underline{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\underline{u}_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\underline{\underline{T}}$ ... Spiegelung an $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ Achse

$\underline{\underline{T}}\,\underline{u}_1 = -\underline{u}_1 \longrightarrow T_{11} = -1,\ T_{21} = 0$

$\underline{\underline{T}}\,\underline{u}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \underline{u}_2 - 2\underline{u}_1 \longrightarrow T_{12} = -2,\ T_{22} = 1$

Bsp 2: V der Polynome [→ Übungen]

(2) ab jetzt: ONB $\{\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n\}$ (i.R.: $n=3$)

↳ verwende Skalarprodukt

$\underline{e}_i \cdot \big|\ \underline{b} = \underline{\underline{T}}\,\underline{a} \longrightarrow b_i = \underline{e}_i \cdot \underline{b} = \underline{e}_i \cdot \underline{\underline{T}}\,\underline{a}$

$\xrightarrow[\text{Linearität}]{\underline{a} = a_j \underline{e}_j} b_i = (\underline{e}_i \cdot \underline{\underline{T}}\,\underline{e}_j) a_j$

$$\longrightarrow \boxed{\begin{aligned} T_{ij} &:= \underline{e}_i \cdot \underline{\underline{T}}\,\underline{e}_j \quad (4.5) \\ b_i &= T_{ij} a_j \quad (4.6) \end{aligned}}$$

Schreibweise:

$\underline{\underline{T}}$ $\begin{cases} \text{Tensor 2. Stufe} \\ \text{Matrixdarstellung: } \underline{\underline{T}} = \begin{pmatrix} T_{11} & \cdots & T_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ T_{n1} & \cdots & T_{nn} \end{pmatrix} \end{cases}$

- (4.5) legt nahe:

Satz: $\boxed{\begin{array}{l}\text{Tensoren 2. Stufe sind Elemente des Produktraumes } V \times V \text{ der die Basis-} \\ \text{tensoren } \{\underline{e}_i \otimes \underline{e}_j;\ i,j = 1, \ldots n\} \text{ besitzt:} \\ \qquad \underline{\underline{T}} = T_{ij}\, \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j \end{array}}$ (4.7)

... Entwicklung von $\underline{\underline{T}}$ nach Basis!

vgl. $\underline{a} = a_i\, \underline{e}_i$