4. Tensoren 2. Stufe

- Abbildung: $\underline{a} \longmapsto \underline{b} = \underline{\underline{T}}\,\underline{a}$
- $T_{ij} := \underline{e}_i \cdot \underline{\underline{T}}\,\underline{e}_j$ (4.5)

  $b_i := T_{ij} a_j$
- $\underline{\underline{T}} = T_{ij}\, \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j$ (4.7)
- Rechnen mit (4.7)

Def.: Das Tensor-/dyadische Produkt von $\underline{a}, \underline{b} \in V$:

$$\underline{a} \otimes \underline{b} \in V \times V$$

besitzt die Eigenschaften:

(1) Bilinearität: $\underline{a} \otimes \underline{b} = (a_i \underline{e}_i) \otimes (b_j \underline{e}_j)$

$= a_i b_j (\underline{e}_i \otimes \underline{e}_j)$ (4.8)

(2) $(\underline{a} \otimes \underline{b})\underline{c} = \underline{a}\,(\underline{b} \cdot \underline{c}) \in V$

damit: (4.5) $T_{ij} = \underline{e}_i \cdot \underline{\underline{T}}\,\underline{e}_j \overset{(4.7)}{=} \underline{e}_i \cdot (T_{kl}\, \underline{e}_k \otimes \underline{e}_l)\underline{e}_j \overset{(4.8)}{=} T_{kl} \underbrace{(\underline{e}_i \cdot \underline{e}_k)}_{\delta_{ik}} \underbrace{(\underline{e}_l \cdot \underline{e}_j)}_{\delta_{lj}}$

$= T_{ij}$ ✓ $\longrightarrow$ (4.1) und (4.7) sind konsistent unter (4.8)

- Komponenten von $(\underline{a} \otimes \underline{b})$: $(\underline{a} \otimes \underline{b})_{ij} = \underline{e}_i \cdot (\underline{a} \otimes \underline{b})\underline{e}_j \overset{(4.8)}{=} (\underline{e}_i \cdot \underline{a})\,(\underline{b} \cdot \underline{e}_j)$

$$\Longrightarrow \boxed{(\underline{a} \otimes \underline{b})_{ij} = a_i b_j} \quad (4.9)$$

4.3 Spezielle Tensoren

- transponierter Tensor $\underline{\underline{T}}^t$:

$$\boxed{\begin{aligned} \underline{a} \cdot \underline{\underline{T}}\,\underline{b} &:= \underline{b} \cdot \underline{\underline{T}}^t \underline{a} \\ T_{ji} &= (\underline{\underline{T}}^t)_{ij} \end{aligned}} \quad (4.10)$$

$\xrightarrow[\underline{b} = \underline{e}_i]{\underline{a} = \underline{e}_j}$

- allg. Tensor 2. Stufe: $n=3$: $3\times 3 = 9$ unabh. Komp.

<u>symmetrischer</u> Tensor 2. Stufe: (4.11)

$$\boxed{\underline{\underline{T}}^t = \underline{\underline{T}} \xrightarrow{(4.10)} T_{ji} = T_{ij}}$$

6 unabh. Komp.
T_{11}, T_{22}, T_{33}
T_{12}, T_{13}, T_{23}

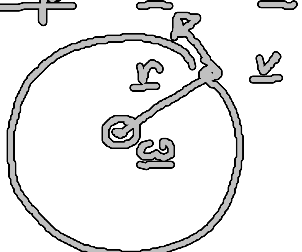
Bsp: $\underline{\underline{\Theta}}$ ... Trägheitstensor

<u>antisymmetrischer</u> Tensor 2. Stufe

$$\boxed{\begin{aligned} &\underline{\underline{T}}^t = -\underline{\underline{T}} \xrightarrow{(4.10)} T_{ji} = -T_{ij} \\ &\longrightarrow T_{11} = T_{22} = T_{33} = 0 \\ &\qquad T_{12} = -T_{21} \; .... \end{aligned}}$$ (4.12)

3 unabh. Komp
T_{12}, T_{13}, T_{23}

<u>Bsp:</u> $\underline{v} = \underline{\omega} \times \underline{r} := \underline{\underline{\Omega}}\,\underline{r}$ mit $\Omega_{ij} = \varepsilon_{ikj}\omega_k$, ε_{231}



$v_i = \varepsilon_{ikj}\,\omega_k\, r_j$

$$\underline{\underline{\Omega}} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}$$

- Zerlegung:

$$\boxed{\begin{aligned} \underline{\underline{T}} &= \underline{\underline{T}}_S + \underline{\underline{T}}_A \\ &= \underbrace{\tfrac{1}{2}(\underline{\underline{T}} + \underline{\underline{T}}^t)}_{\text{symmetrisch}} + \underbrace{\tfrac{1}{2}(\underline{\underline{T}} - \underline{\underline{T}}^t)}_{\text{antisymmetrisch}} \end{aligned}}$$ (4.12a)

- Einheitstensor: $\underline{\underline{1}} = \delta_{ij}\, \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j$ (4.13)

$\underline{e}_i \cdot \underline{\underline{1}}\, \underline{e}_j = \delta_{ij}$, $\underline{\underline{1}} = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$

4.4 Algebra: (wie Matrizen)

- Addition: $\underline{C} = \underline{A} + \underline{B} \longrightarrow C_{ij} = A_{ij} + B_{ij}$ (4.14)
- skalare Multiplikation: $\underline{C} = p\underline{A} \longrightarrow C_{ij} = p A_{ij}$, $p \in \mathbb{R}$ (4.15)
- Multiplikation von Tensoren:

$$\underline{C} = \underline{A}\,\underline{B} \longrightarrow C_{ij} = A_{ik} B_{kj} \quad (4.16)$$

$$\neq \underline{B}\,\underline{A}$$

Trick: $\underline{1} = \delta_{kl}\, \underline{e}_k \otimes \underline{e}_l$

Bew: $\underline{C} = \underline{A}\,\underline{B} \longrightarrow C_{ij} = \underline{e}_i \cdot \underline{A}\,\underline{B}\, \underline{e}_j$

$$= \delta_{kl}\, \underbrace{\underline{e}_i \cdot \underline{A}\, (\underline{e}_k}_{A_{ik}} \otimes \underbrace{\underline{e}_l)\, \underline{B}\, \underline{e}_j}_{B_{lj}}$$

- Inverser Tensor $\underline{T}^{-1}$: $\underline{T}\,\underline{T}^{-1} = \underline{1}$

$$\xrightarrow[\text{schieben}]{\underline{1}\text{ ein-}} T_{ik} (\underline{T}^{-1})_{kj} = \delta_{ij} \quad (4.17)$$

- Spurbildung: $\mathrm{Sp}\, \underline{T} = T_{ii}$ (4.18)

4.5 Drehungen

- Erinnerung [2.4.4]: $\{\underline{e}_i\} \longrightarrow \{\underline{e}_i'\}$ mit $\underline{e}_i' = D_{ij}\, \underline{e}_j$ (2.32)

$$\left.\begin{aligned} D_{ij} D_{kj} &= \delta_{ik} \\ \underline{D}\, \underline{D}^t &= \underline{1} \end{aligned}\right\} (2.33)$$

- aktiver Standpunkt: $\underline{T} = T_{ij}\, \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j \xrightarrow[\underline{T}]{\text{gedreht}}$

$$D\underline{T} := T_{kl}\, \underline{e}_k' \otimes \underline{e}_l'$$

$$= T_{kl}\, D_{ki} D_{lj}\, \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j$$

$$\xrightarrow{\text{in } \{\underline{e}_i\}} \boxed{\begin{aligned} [D\underline{T}]_{ij} &= T_{kl}\, D_{ki} D_{lj} \\ &= D^t_{ik} D^t_{jl}\, T_{kl} \end{aligned}} \quad (4.19)$$

- passiver Standpunkt: $\underline{\underline{T}}$ in $\{\underline{e}_i'\}$?

also: $\underline{\underline{T}} = T_{kl}\, \underline{e}_k \otimes \underline{e}_l \overset{!}{=} T_{ij}'\, \underline{e}_i' \otimes \underline{e}_j'$

$\longrightarrow$ Trafo von Tensorkompi:

$$T_{ij}' \overset{(4.5)}{=} \underline{e}_i' \cdot \underline{\underline{T}}\, \underline{e}_j' = \underline{e}_i' \cdot (T_{kl}\, \underline{e}_k \otimes \underline{e}_l)\, \underline{e}_j'$$

$$= T_{kl}\, \underbrace{(\underline{e}_i' \cdot \underline{e}_k)}_{O_{ik}}\, \underbrace{(\underline{e}_l \cdot \underline{e}_j')}_{O_{jl}}$$

$$\longrightarrow \boxed{\begin{aligned} T_{ij}' &= O_{ik}\, O_{jl}\, T_{kl} \\ T_{ij} &= O_{ik}^t\, O_{jl}^t\, T_{kl}' \end{aligned}} \quad (4.20)$$

4.6 Diagonalisierung eines symmetrischen Tensors

- „Tensor begreifen"

„QM: Operator $\longrightarrow$ Meßgrößen!

- i.A.: $n=3$! alles reell
- Eigenwertproblem des Tensors / der Matrix $\underline{\underline{T}}$:

$$\boxed{\underline{\underline{T}}\, \underline{a} = \lambda\, \underline{a}} \quad (4.21)$$

... $\underline{\underline{T}}\,\underline{a} \parallel \underline{a}$!!

λ ... Eigenwert (EW) zu $\underline{a}$ ... Eigenvektor (EV)

Bsp: $\underline{L} = \underline{\underline{\Theta}}\, \underline{\omega}^{(i)} = \Theta^{(i)} \underline{\omega}^{(i)}$

$\longrightarrow \underline{L} \parallel \underline{\omega}^{(i)}$!

• (4.21) $\longrightarrow$ $(\underline{\underline{T}} - \lambda \underline{\underline{1}})\,\underline{a} = 0 \xrightarrow{[\text{Kap. } 3.2]}$ (4.22)

besitzt nichttriviale Lsg. $\underline{a} \neq 0$ falls $\boxed{\det[\underline{\underline{T}} - \lambda \underline{\underline{1}}] = 0}$

$$0 = \begin{vmatrix} T_{11}-\lambda & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22}-\lambda & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33}-\lambda \end{vmatrix}$$

$\longrightarrow$ kubische Gl. für λ

$\longrightarrow$ 3 Lösungen / EW $\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}, \lambda^{(3)}$

(i.a. 1 reell & 2 kompl. Lsg)

mit EV $\underline{a}^{(1)}, \underline{a}^{(2)}, \underline{a}^{(3)}$

• Satz: $\boxed{\text{Falls reelles } \underline{\underline{T}} \text{ symmetrisch} \longrightarrow \lambda^{(i)} \in \mathbb{R}}$ (4.23)

Beweis:
$$\left.\begin{aligned} \underline{a}^* \cdot |\ & \underline{\underline{T}}\,\underline{a} = \lambda \underline{a} \\ \underline{a} \cdot |\ & \underline{\underline{T}}\,\underline{a}^* = \lambda^* \underline{a}^* \end{aligned}\right\} \ominus$$
mit $*$ .. komplex konjugiert

$$\underline{a}^* \cdot \underline{\underline{T}}\,\underline{a} - \underline{a} \cdot \underline{\underline{T}}\,\underline{a}^* \underset{\underline{\underline{T}}^t = \underline{\underline{T}}}{=} 0 = (\lambda - \lambda^*)\, \underbrace{\underline{a}^* \cdot \underline{a}}_{\neq 0} \longrightarrow \lambda = \lambda^* \text{ qed}$$

• Satz: $\boxed{\text{Die EV eines reellen symmetr. } \underline{\underline{T}} \text{ sind orthogonal: } \underline{a}^{(i)} \cdot \underline{a}^{(j)} = \delta_{ij}}$ (4.24)

Beweis: (1) $\lambda^{(i)} \neq \lambda^{(j)}$
$$\left.\begin{aligned} \underline{a}^{(j)} \cdot |\ & \underline{\underline{T}}\,\underline{a}^{(i)} = \lambda^{(i)} \underline{a}^{(i)} \\ \underline{a}^{(i)} \cdot |\ & \underline{\underline{T}}\,\underline{a}^{(j)} = \lambda^{(j)} \underline{a}^{(j)} \end{aligned}\right\} \ominus$$

mit $\underline{\underline{T}} = \underline{\underline{T}}^t \longrightarrow 0 = (\lambda^{(i)} - \lambda^{(j)})\, \underline{a}^{(i)} \cdot \underline{a}^{(j)} \xrightarrow[\lambda^{(i)} \neq \lambda^{(j)}]{i \neq j}$

(2) Entartung: $\lambda^{(i)} = \lambda^{(j)}$ $\qquad \underline{a}^{(i)} \perp \underline{a}^{(j)}$

isotroper Tensor: $\lambda^{(1)} = \lambda^{(2)} = \lambda^{(3)}$

axial-symmetr. Tensor: $\lambda^{(1)} = \lambda^{(2)} \neq \lambda^{(3)}$

Richtung $\underline{a}^{(3)}$ ausgezeichnet

} Wähle orthogonale EV im Entartungsraum

• Darstellung von $\underline{\underline{T}}$ in Eigenvektor-Basis $\{\underline{a}^{(i)}\}$:

$$\underline{\underline{T}} = T'_{ij}\, \underline{a}^{(i)} \otimes \underline{a}^{(j)} \; ?$$

mit $\underline{\underline{T}}\,\underline{a}^{(i)} = \lambda\, \underline{a}^{(i)}$, $\quad \underline{a}^{(i)} \cdot \underline{a}^{(j)} = \delta_{ij}$

$$\rightarrow T'_{ij} \overset{(4.5)}{=\!=} \underline{a}^{(i)} \cdot \underbrace{\underline{\underline{T}}\,\underline{a}^{(j)}}_{\lambda^{(j)}\underline{a}^{(j)}} \xrightarrow{(4.25)} \boxed{\begin{gathered} T'_{ij} = \lambda^{(i)} \delta_{ij} \\ \underline{\underline{T}}' = \begin{pmatrix} \lambda^{(1)} & & 0 \\ & \lambda^{(2)} & \\ 0 & & \lambda^{(3)} \end{pmatrix} \quad (4.26) \\ \underline{\underline{T}} = \sum_i \lambda^{(i)}\, \underline{a}^{(i)} \otimes \underline{a}^{(i)} \end{gathered}}$$

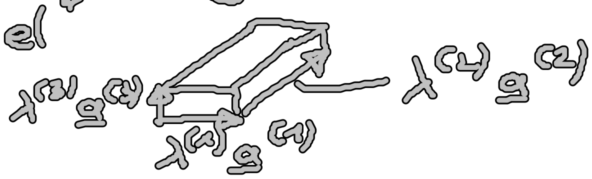
... Diagonalgestalt

• Trafo der Tensorkomp auf $\{\underline{a}^{(i)}\}$: (vgl. Kap. 4.5)

$$\left.\begin{aligned} D_{ij} &= \underline{a}^{(i)} \cdot \underline{e}_j \\ T'_{ij} &= D_{ik}\, D_{jl}\, T_{kl} \end{aligned}\right\} (4.27)$$

• graphische Darstellung von $\underline{\underline{T}}$:

(1) „Ziegel"



(2) Ellipsoid: Halbachsen $\parallel \underline{a}^{(i)}$ mit Längen $\lambda^{(i)}$

} Tensor besitzt Orientierung im Raum! Drehung (s. Kap. 4.5)

- Klausur: Fr. 20.7. um 14^{00}, HO1058