(Bemerkung)

Aufgabe 1 / Blatt 7: Eigenwertproblem

EW & EV von Tensoren / Matrizen

$$\underline{\underline{T}}\,\underline{a} = \lambda\,\underline{a}$$

Lösung

1. Systematisch:

(i) Löse: $\det(\underline{\underline{T}} - \lambda\underline{\underline{1}}) = 0$ … charakt. Polynom von $\underline{\underline{T}}$

$\longrightarrow \lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}, \lambda^{(3)}$

(ii) Löse:

$$(\underline{\underline{T}} - \lambda^{(i)}\underline{\underline{1}})\,\underline{a}^{(i)} = \underline{0} \longrightarrow \underline{a}^{(i)}$$

2. Intuitives Raten: $\longrightarrow \underline{a}^{(i)} \xrightarrow[\underline{\underline{T}}\,\underline{a}^{(i)} = \lambda^{(i)}\underline{a}^{(i)}]{} \lambda^{(i)}$

---

# 5. Euklidischer Raum

- Motivation:

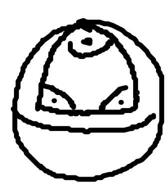
(1) Grundlage der Newtonschen Mechanik:

|

Physikal. Anschauungsraum
= euklidischer Raum
= flacher Raum

$\longrightarrow$ euklidische Geometrie gilt:

Bsp: a) Winkelsumme im Dreieck $= 180°$

(nicht auf der Kugel:  Winkelsumme $270°$)

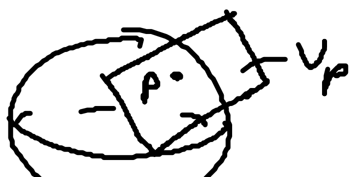
b) Satz von Pythagoras: $a^2 + b^2 = c^2$

c) Parallelenaxiom:
In einer Ebene $\alpha$ gibt es zu jeder Geraden $g$ und jedem Pkt. $S$ (außerhalb von $g$) genau eine Gerade, die zu $g$ parallel ist

(2) Unterscheide:
physikal. Anschauungsraum $A$ mit Punkten $P$ und Vektorraum $V_P$ („Tangentialraum"), angeheftet an jedem Pkt. $P$, in dem die physikal. Vektoren wirken

- flacher Raum: Unterscheidung etwas "künstlich" weil Pkte in $A$ Vektoren definieren [s. Kap. 5.1]
- gekrümmter Raum: absolut wichtig zum Verständnis der ART

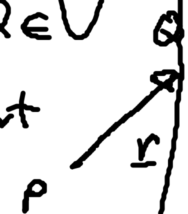
Bsp.




## 5.1 <u>Definition</u>

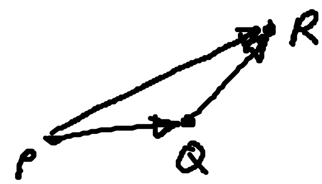
<u>Def</u>: Ein Punktraum $A$ mit Pkten. $P, Q, \dots$ und ein Vektorraum $V$ bilden einen <u>affinen</u> Raum, wenn gilt:

(1) $P, Q \in A \longmapsto$ Verbindungsvektor $\underline{r} = \overrightarrow{PQ} \in V$




(2) „Abtragen" eines Vektors $\underline{v} \in V$ von $P$ führt genau zu einem $Q$

(3) $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$ (Dreieckregel)



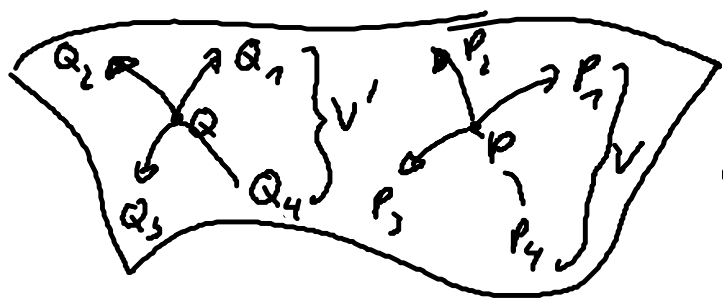

(4) $\overrightarrow{PQ} = \underline{0} \longrightarrow P = Q$

(5.1)

<u>Def</u>: Ist $V$ ein euklidischer Vektorraum, so bildet er mit $A$ einen <u>euklidischen Raum</u> (5.2)

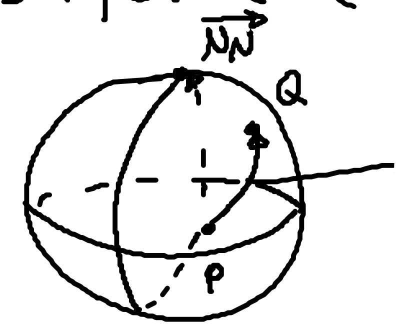
$\longrightarrow$ Abstandsmessung in $A$ über Skalarprodukt in $V$: $\quad d(P,Q) = \sqrt{\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PQ}} \quad$ (5.3)

- gekrümmte Räume $\neq$ affine Räume:




i.a. $V' \neq V$

- Bsp: Kugeloberfläche (Prototyp eines gekrümmten Raumes)

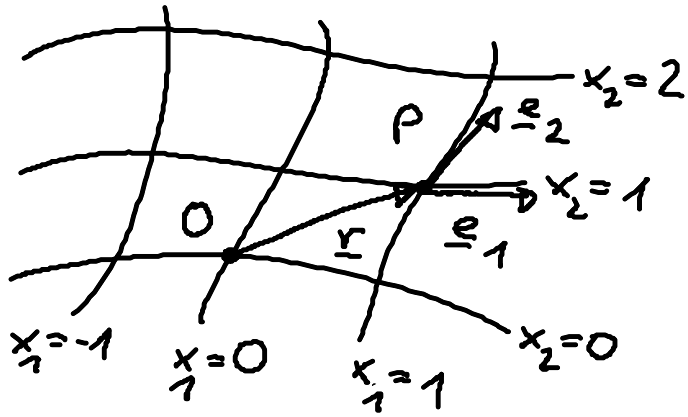



$\overrightarrow{PQ}$ auf Großkreis
Nullelement $0 = \overrightarrow{NN}$ nicht eindeutig
$\longrightarrow$ kein $V$

## 5.2. Koordinatensysteme

- Motivation: Bahnkurve eines Massenpktes, Skalar-/Vektorfelder
- Ort von Punkt $P \longleftrightarrow$ Koordinatentripel: $(x_1, x_2, x_3)$

a) allgemeine (krummlinige) Koordinaten:




Netz von bel. Koord. linien

Ort von P: $(x_1, x_2, x_3)$ mit <u>Ortsvektor</u> $\underline{r} = \overrightarrow{OP}$ $[\in U!!]$

- natürliche (<u>Koordinaten</u>) Basis für $V_P$ angeheftet an P:

$\longrightarrow$ normierte Tangentialvektoren $\underline{e}_i$ an $x_i$-Linie ($x_j = \text{const.}$, $j \neq i$)

$|\underline{e}_i| = 1$, i.a. $\underline{e}_i \cdot \underline{e}_j \neq 0$,

$\{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3\}$ i.a. nicht ortsfest

- Berechnung? $\longrightarrow$ Einschub: <u>partielle Ableitung</u>

(i) Skalarfeld: $f(\underline{r}) = f(x_1, x_2, x_3)$

Änderung entlang $x_i$: (5.3)

$$\boxed{\left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_{\substack{x_j=\text{const.}\\ j\neq i}} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(\ldots, x_i+\varepsilon, \ldots) - f(x_1, x_2, x_3)}{\varepsilon}}$$

Schreibweise: $\frac{\partial f(\underline{r})}{\partial x_i} = \partial_i f(\underline{r})$

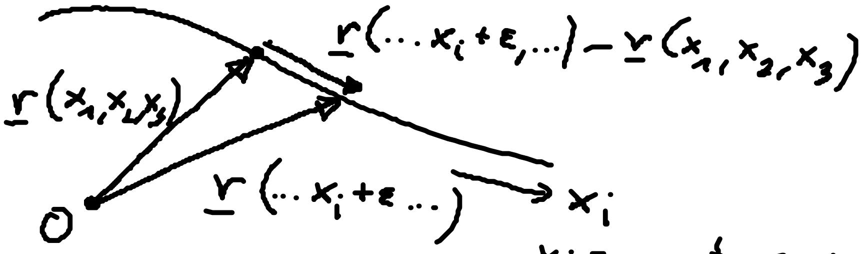
(ii) Vektoren:

(5.4)
$$\boxed{\frac{\partial \underline{v}(\underline{r})}{\partial x_i} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\underline{v}(\ldots, x_i+\varepsilon, \ldots) - \underline{v}(x_1, x_2, x_3)}{\varepsilon}}$$

(iii) Produkt-, Kettenregel etc. gültig

- Tangentialvektor an $x_i$-Koordinatenlinie:

$$\frac{\partial \underline{r}}{\partial x_i} \underset{(5.4)}{=} \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\underline{r}(\ldots x_i+\varepsilon, \ldots) - \underline{r}(x_1, x_2, x_3)}{\varepsilon} \quad (5.5)$$



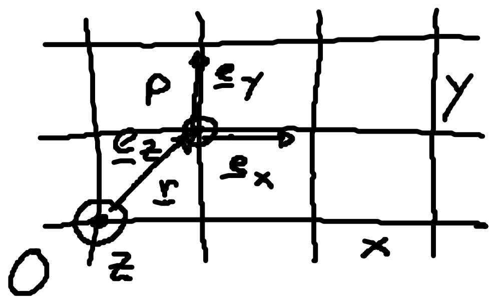

$x_j = \text{const}, j \neq i$

$$\Longrightarrow \boxed{\underline{e}_i = \left|\frac{\partial \underline{r}}{\partial x_i}\right|^{-1} \frac{\partial \underline{r}}{\partial x_i}} \quad (5.6)$$

- NB: In RT, $\underline{e}_i = \dfrac{\partial \underline{r}}{\partial x_i}$

## b) kartesische Koordinaten

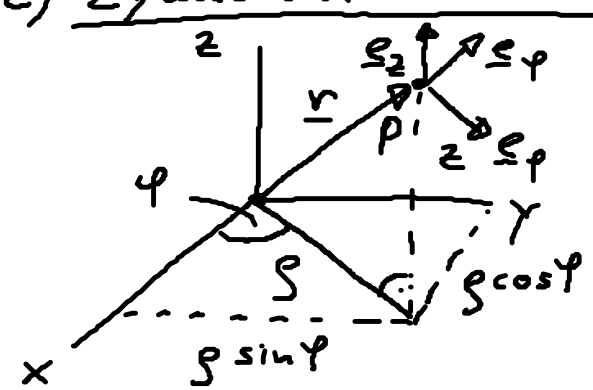
[Koord. linien sind zueinander senkrechte Geraden]




$P:(x,y,z)$

- $$\left.\begin{array}{l} \{\underline{e}_x, \underline{e}_y, \underline{e}_z\} \text{ ortsfest} \\ \underline{e}_i \cdot \underline{e}_j = \delta_{ij}, \quad i,j = x,y,z \end{array}\right\} \longrightarrow \underline{r} = x_i\, \underline{e}_i = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \quad (5.7)$$

## c) Zylinderkoordinaten

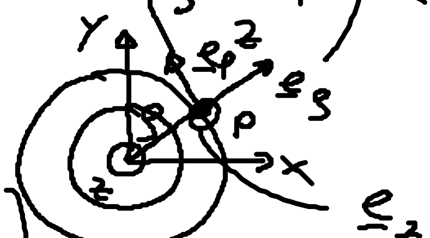



$P:(\rho,\varphi,z)$

$$\underline{r} = \rho\cos\varphi\, \underline{e}_x + \rho\sin\varphi\, \underline{e}_y + z\, \underline{e}_z$$

$$= \begin{pmatrix} \rho\cos\varphi \\ \rho\sin\varphi \\ z \end{pmatrix} \quad (5.8)$$

- Koordinatenbasis:




$$\underline{e}_\rho = \left|\frac{\partial \underline{r}}{\partial \rho}\right|^{-1} \frac{\partial \underline{r}}{\partial \rho} \underset{(5.8)}{=} \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\partial \underline{r}}{\partial \rho} \quad (5.9)$$

$$\frac{\partial \underline{r}}{\partial \varphi} \underset{(5.8)}{=} \begin{pmatrix} -\rho\sin\varphi \\ \rho\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \left|\frac{\partial \underline{r}}{\partial \varphi}\right|^2 = \rho^2 \underbrace{(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi)}_{=1} = \rho^2$$

$$\longrightarrow \underline{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\underline{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

... ortsabhängig!!

- $\underline{e}_i \cdot \underline{e}_j = \delta_{ij}$ , $i,j = \rho, \varphi, z$
- NB: $\underline{r} = \rho\, \underline{e}_\rho + z\, \underline{e}_z$ (5.10) [$\underline{e}_\rho$ für Pkt $\underline{r}$]