Bemerkung

Aufgabe 1/ Blatt 7: Eigenwertproblem

EW & EV von Tensoren/Matrizen

$$\underline{\underline{T}}\,\underline{a} = \lambda\,\underline{a}$$

Lösung

1. Systematisch:

(i) Löse: $\det(\underline{\underline{T}} - \lambda \underline{\underline{1}}) = 0$ ... charakt. Polynom von $\underline{\underline{T}}$

$\longrightarrow \lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}, \lambda^{(3)}$

(ii) Löse:

$(\underline{\underline{T}} - \lambda^{(i)} \underline{\underline{1}})\,\underline{a}^{(i)} = \underline{0} \longrightarrow \underline{a}^{(i)}$

2. Intuitives Raten: $\longrightarrow \underline{a}^{(i)} \xrightarrow[\underline{\underline{T}}\,\underline{a}^{(i)} = \lambda^{(i)} \underline{a}^{(i)}]{} \lambda^{(i)}$

---

5. Euklidische Raum

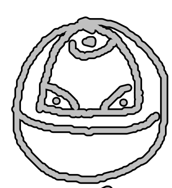
· Motivation:

(1) Grundlage der Newtonschen Mechanik:

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Physikal. Anschauungsraum} \\ = \text{euklidischer Raum} \\ = \text{flacher Raum}\end{array}}$$

$\longrightarrow$ euklidische Geometrie gilt:

Bsp: a) Winkelsumme im Dreieck $= 180^\circ$

(nicht auf der Kugel:  Winkelsumme 270°)

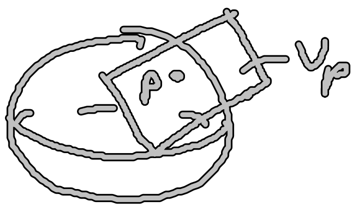
b) Satz von Pythagoras: $a^2 + b^2 = c^2$

c) Parallelenaxiom:
In einer Ebene α gibt es zu jeder Geraden g und jedem Pkt. S (außerhalb von g) genau eine Gerade, die zu g parallel ist

(2) Unterscheide:
physikal. Anschauungsraum A mit Punkten P und Vektorraum V_P („Tangentialraum"), angeheftet an jedem Pkt. P, in dem die physikal. Vektoren wirken

- flacher Raum: Unterscheidung etwas "künstlich" weil Pkte in A Vektoren definieren [s. Kap. 5.1]
- gekrümmter Raum: absolut wichtig zum Verständnis der ART

Bsp.



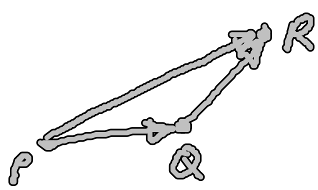
5.1 Definition

Def: Ein Punktraum A mit Pktn. $P, Q, \dots$ und ein Vektorraum V bilden einen <u>affinen</u> Raum, wenn gilt:

(1) $P, Q \in A \longmapsto$ Verbindungsvektor $\underline{r} = \overrightarrow{PQ} \in V$

(2) „Abtragen" eines Vektors $\underline{r} \in V$ von P führt genau zu einem Q

(3) $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$
(Dreiecksregel)



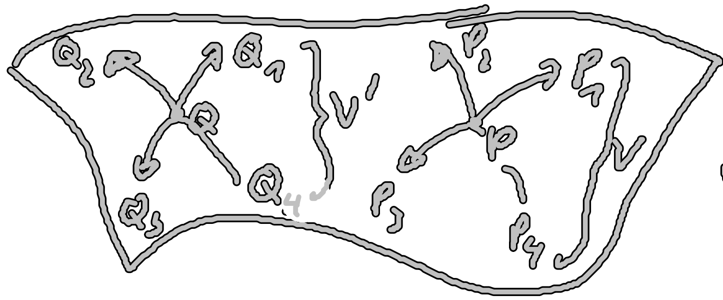
(5.1)

(4) $\overrightarrow{PQ} = \underline{0} \longrightarrow P = Q$

Def: Ist V ein euklidischer Vektorraum, so bildet er mit A einen <u>euklidischen Raum</u> (5.2)

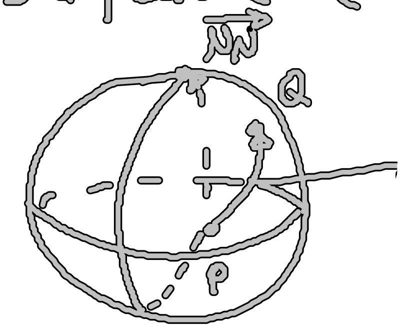
→ Abstandsmessung in A über Skalarprodukt in V: $d(P,Q) = \sqrt{\vec{PQ} \cdot \vec{PQ}}$ (5.3)

• gekrümmte Räume ≠ affine Räume:



i.a. $V' \neq V$

• Bsp: Kugeloberfläche (Prototyp eines gekrümmten Raumes)



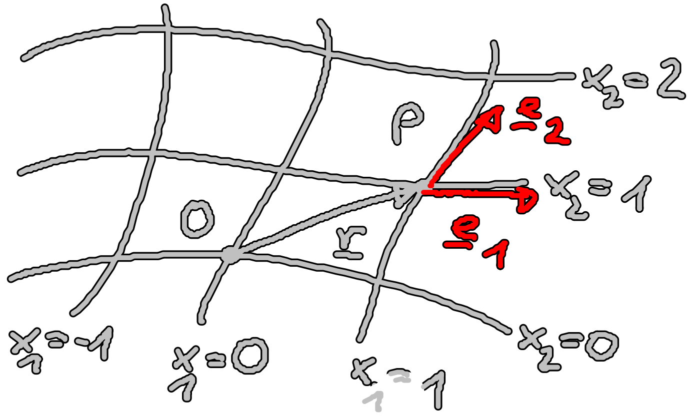
$\vec{PQ}$ auf Großkreis
Nullelement $0 = \vec{NN}$
nicht eindeutig
→ kein V

5.2. Koordinatensysteme

• Motivation: Bahnkurve eines Massenpunktes, Skalar-/Vektorfelder

• Ort von Punkt P ⟷ Koordinatentripel: (x_1, x_2, x_3)

a) allgemeine (krummlinige) Koordinaten:



Netz von bel. Koord. Linien

Ort von P: (x_1, x_2, x_3) mit Ortsvektor $\underline{r} = \overrightarrow{OP}$ $[\in U!!]$

- natürliche (Koordinaten) Basis für V_P angeheftet an P:

  $\longrightarrow$ normierte Tangentialvektoren $\underline{e}_i$ an x_i-Linie ($x_j = \text{const.}$, $j \neq i$)

  $|\underline{e}_i| = 1$, i.a. $\underline{e}_i \cdot \underline{e}_j \neq 0$,

  $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3\}$ i.a. nicht ortsfest

- Berechnung? $\longrightarrow$ Einschub: partielle Ableitung

  (i) Skalarfeld: $f(\underline{r}) = f(x_1, x_2, x_3)$

  Änderung entlang x_i: (5.3)

$$\boxed{\left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_{\substack{x_j = \text{const.} \\ j \neq i}} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(\ldots, x_i + \varepsilon, \ldots) - f(x_1, x_2, x_3)}{\varepsilon}}$$

  Schreibweise: $\dfrac{\partial f(\underline{r})}{\partial x_i} = \partial_i f(\underline{r})$

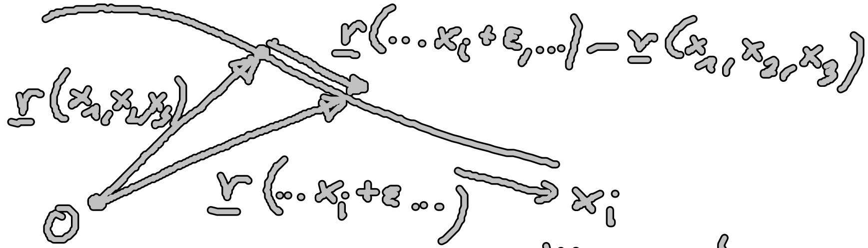
  (ii) Vektoren: (5.4)

$$\boxed{\frac{\partial \underline{v}(\underline{r})}{\partial x_i} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\underline{v}(\ldots, x_i + \varepsilon, \ldots) - \underline{v}(x_1, x_2, x_3)}{\varepsilon}}$$

  (iii) Produkt-, Kettenregel etc. gültig

- Tangentialvektor an x_i-Koordinatenlinie:

$$\frac{\partial \underline{r}}{\partial x_i} \underset{(5.4)}{=} \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\underline{r}(\ldots x_i + \varepsilon, \ldots) - \underline{r}(x_1, x_2, x_3)}{\varepsilon} \qquad (5.5)$$

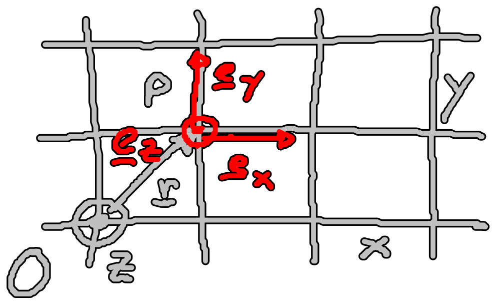


$x_j = \text{const.}, \ j \neq i$

$$\Longrightarrow \boxed{\underline{e}_i = \left|\frac{\partial \underline{r}}{\partial x_i}\right|^{-1} \frac{\partial \underline{r}}{\partial x_i}} \quad (5.6)$$

- NB: In KT, $\underline{e}_i = \frac{\partial \underline{r}}{\partial x_i}$

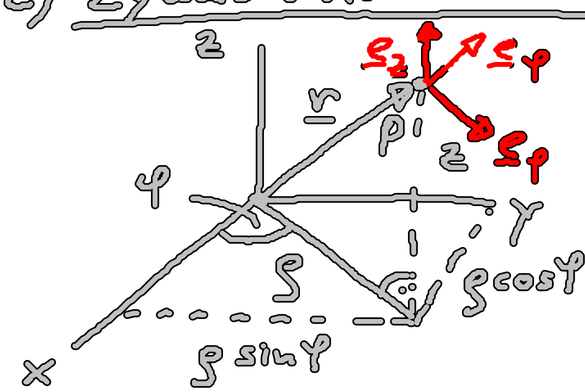
b) <u>kartesische Koordinaten</u> [Koord. linien sind zueinander senkrechte Geraden]



P: (x, y, z)

- $\{\underline{e}_x, \underline{e}_y, \underline{e}_z\}$ ortsfest, $\underline{e}_i \cdot \underline{e}_j = \delta_{ij}$, $i,j = x,y,z$ $\longrightarrow$ $\underline{r} = x_i \underline{e}_i = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ (5.7)

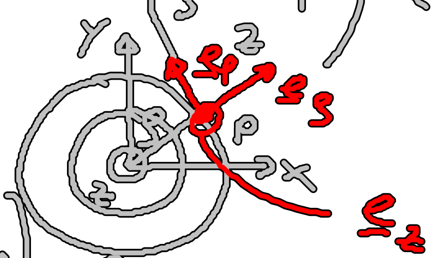
c) <u>Zylinderkoordinaten</u>



P: (ρ, φ, z)

$$\underline{r} = \rho\cos\varphi \, \underline{e}_x + \rho\sin\varphi \, \underline{e}_y + z \, \underline{e}_z = \begin{pmatrix} \rho\cos\varphi \\ \rho\sin\varphi \\ z \end{pmatrix} \quad (5.8)$$

- Koordinatenbasis:



$$\underline{e}_\rho = \left|\frac{\partial \underline{r}}{\partial \rho}\right|^{-1} \frac{\partial \underline{r}}{\partial \rho} \underset{(5.8)}{=} \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\partial \underline{r}}{\partial \rho}$$

(5.9)

$$\frac{\partial \underline{r}}{\partial \varphi} \underset{(5.7)}{=} \begin{pmatrix} -\rho \sin\varphi \\ \rho\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \left|\frac{\partial \underline{r}}{\partial \varphi}\right|^2 = \rho^2 \underbrace{(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi)}_{=1} = \rho^2$$

$$\longrightarrow \underline{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\underline{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

... ortsabhängig !!

- $\underline{e}_i \cdot \underline{e}_j = \delta_{ij}$, $i, j = \rho, \varphi, z$
- NB: $\underline{r} = \rho\, \underline{e}_\rho + z\, \underline{e}_z \overset{(5.10)}{\,}$ [$\underline{e}_\rho$ für Pkt $\underline{r}$]