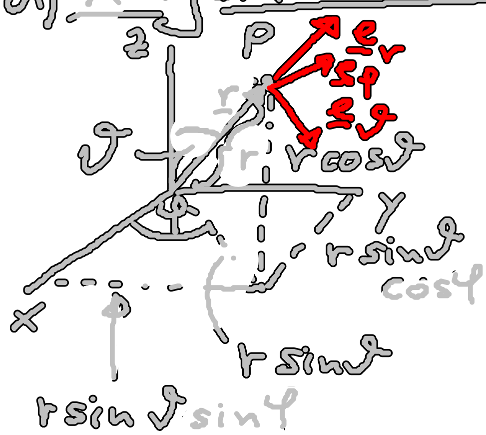
$P(x_1, x_2, x_3)$, $\underline{r}(x_1, x_2, x_3)$

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\underline{r}(x_i) \Big/ \left|\frac{\partial}{\partial x_i}\underline{r}(x_i)\right|$$

d) Kugelkoordinaten

Polarwinkel Azimuthalwinkel



$$P: (r, \vartheta, \varphi)$$

$$\underline{r} = r\sin\vartheta\cos\varphi\,\underline{e}_x + r\sin\vartheta\sin\varphi\,\underline{e}_y + r\cos\vartheta\,\underline{e}_z = \begin{pmatrix} r\sin\vartheta\cos\varphi \\ r\sin\vartheta\sin\varphi \\ r\cos\vartheta \end{pmatrix} \quad (5.11)$$

- Koordinatenbasis: ortsabhängig
  $\longrightarrow$ Übungen
- NB: $\underline{r} = r\,\underline{e}_r(\vartheta, \varphi)$ (5.12

5.3 Bahnkurven

- Teil der Bahn im Raum:

(i) Zeit $t \longmapsto \underbrace{x_1(t),\ x_2(t),\ x_3(t)}_{\text{Koordinatentripel}}$ (5.13)

x_i ... kartesischen, Zylinder-, Kugelkoordinaten ...

(ii) $t \longmapsto \underbrace{\underline{r}(t)}_{\text{Ortsvektor}}$

Bsp: (i) gerade Bahn:

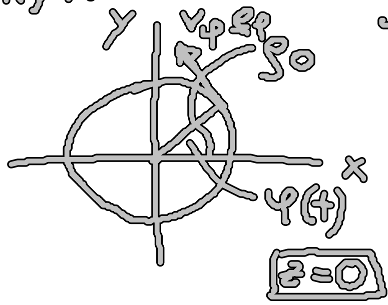
$$\left.\begin{aligned} x(t) &= v_x t + x_0 \\ y(t) &= v_y t + y_0 \\ z(t) &= v_z t + z_0 \end{aligned}\right\} \quad (5.15)$$

v_z: konst. Geschw. (s. später)

z_0: Ort bei $t=0$

$$\hat{=} \quad \underline{r}(t) = \underline{v}\, t + \underline{r}_0 \quad (5.16)$$

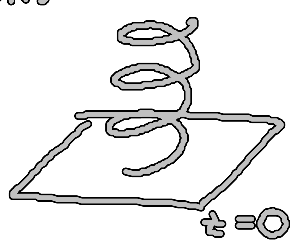
(ii) Kreisbahn:



$$\left.\begin{aligned} \rho(t) &= \rho_0 \\ \varphi(t) &= \frac{v_\varphi}{\rho_0}\, t = \omega t \\ z(t) &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (5.17)$$

ω: „Kreisfrequenz“ „Winkelgeschw.“

(iii) Helix:

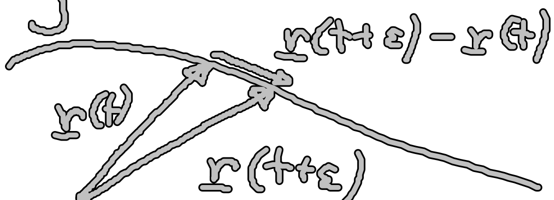


$$\left.\begin{aligned} \rho(t) &= \rho_0 \\ \varphi(t) &= \frac{v_\varphi}{\rho_0}\, t = \omega t \\ z(t) &= v_z t \end{aligned}\right\} \quad (5.18)$$

· Teilchengeschwindigkeit:

$$\boxed{\underline{v}(t) = \frac{d\underline{r}(t)}{dt} = \dot{\underline{r}} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\underline{r}(t+\varepsilon) - \underline{r}(t)}{\varepsilon}} \quad (5.19)$$

(i) Tangente an Bahnkurve



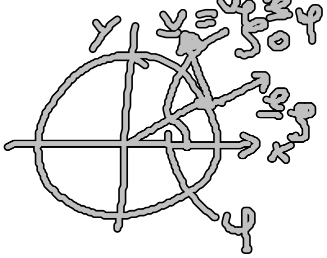
(ii) $$v(t) = |\underline{v}(t)| = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{|\underline{r}(t+\varepsilon) - \underline{r}(t)|}{\varepsilon}$$

(iii) Einschub: Rechenregeln für Vektordifferentiale

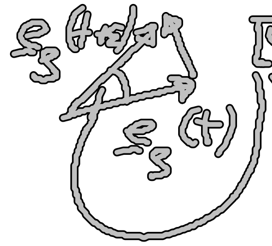
Bsp: (i) (5.15)/(5.16): $\underline{r}(t) = \underline{v}\,t + \underline{r}_0 \longrightarrow \frac{d\underline{r}}{dt} = \underline{v}$ (5.20)

Abl. der Komp.

(ii) (5.17): $\underline{r}(t) = \rho_0\, \underline{e}_\rho \longrightarrow \frac{d\underline{r}}{dt} = \underbrace{\dot{\rho}_0}_{=0}\, \underline{e}_\rho + \rho_0\, \dot{\underline{e}}_\rho$



$\dot{\underline{e}}_\rho$: (1) Überlegung:



$[\varphi(t+\varepsilon) - \varphi(t)]\, \underline{e}_\varphi(t)$

$$\longrightarrow \dot{\underline{e}}_\rho = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\underline{e}_\rho(t+\varepsilon) - \underline{e}_\rho(t)}{\varepsilon} = \underbrace{\dot{\varphi}}_{\omega}\, \underline{e}_\varphi$$

(2) Rechnen

$$\underline{e}_\rho \overset{(5.9)}{=} \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \dot{\underline{e}}_\rho = \dot{\varphi} \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \overset{(5.9)}{=} \dot{\varphi}\, \underline{e}_\varphi$$

$$\longrightarrow \frac{d\underline{r}}{dt} = \rho_0 \underbrace{\dot{\varphi}}_{\omega}\, \underline{e}_\varphi = v_\varphi\, \underline{e}_\varphi \quad (5.21)$$

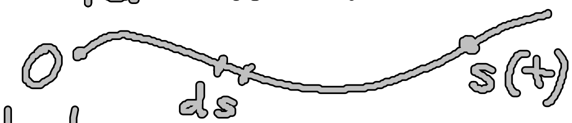
(iii) (5.18) $\underline{r}(t) = \rho_0\, \underline{e}_\rho + v_z t\, \underline{e}_z \longrightarrow$

Helix:

$$\frac{d\underline{r}}{dt} = v_\varphi\, \underline{e}_\varphi + v_z\, \underline{e}_z \quad (5.22)$$

- **Bogenlängen-Darstellung**

Teilchenbahn



$$ds = \underbrace{v}_{|\underline{v}|_{s(t)}} dt \quad \ldots \text{ zurückgelegte Weglänge in } dt \qquad (5.23)$$

$$\longrightarrow\ s(t) = \int_0^{s(t)} ds' = s'\Big|_0^{s(t)} = \int_0^t v(t')\,dt' \quad \ldots \text{ zurückgelegte Weglänge zur Zeit } t = \text{Bogenlänge} \qquad (5.24)$$

Bahnkurve

$$\underline{r}(t) \underset{(5.24)}{=\!=} \underline{r}(t(s)) = \underline{r}(s) \qquad (5.25)$$

[Physiker notation: $\underline{r}(t)$, $\underline{r}(s)$ … dieselbe Bahn, unterschiedliche Funktionen]

$$\cancel{\underline{r}(t) = t^2}$$
$$\cancel{\underline{r}(s) = s^2}$$

Kettenregel

$$\text{Bilde: } \frac{d\underline{r}}{ds} = \underbrace{\frac{d\underline{r}(t)}{dt}}_{\underline{v}(t)} \ \underbrace{\frac{dt}{ds}}_{\frac{1}{v(t)}}$$

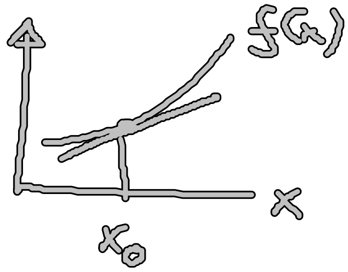
$$\longrightarrow\ \boxed{\frac{d\underline{r}(s)}{ds} = \hat{\underline{t}}\ ,\quad |\hat{\underline{t}}| = 1} \qquad (5.26)$$

- NB: Neben t oder s andere Kurvenparameter möglich

  Bsp: $\omega t = \varphi$

6. Vektoranalysis

- Motivation:
  räumliche Veränderungen von physikal. Größen
  $\longrightarrow$ Differenzieren / Ableiten
  $\hat{=}$ Erkunden lokaler Veränderungen



6.1 Skalarfelder

- Skalarfeld $f(\underline{r})$: ordnet jedem Raumpkt. $P[(x_1, x_2, x_3)$ oder $\underline{r}]$ ein Skalar $\in \mathbb{R}$ zu

Bsp: Temp. T, Druck p (in einer Flüssigkeit), Massendichte ρ (z.B. in der Atmosphäre), potentielle Energie U ...

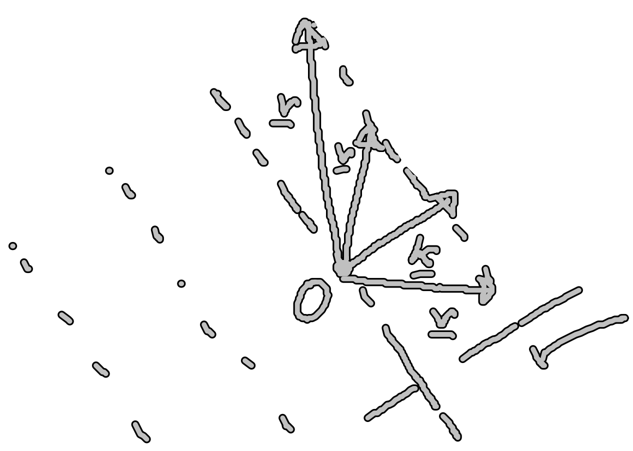
- Bsp:

(1) ebene Welle: $f(\underline{r}) \sim \sin(\underbrace{\underline{k} \cdot \underline{r}}_{})$ (6.1)

„Phase" ($\underline{k} \cdot \underline{r}$)

Wellenvektor ($\underline{k}$)

(z.B. Schallwellen in Flüssigkeiten, Festkörpern]



Führe ein:
Fläche konstanter Phase
$\underline{k} \cdot \underline{r}$

Bsp: $\underline{k} = k\, \underline{e}_x \longrightarrow \underline{r} \cdot \underline{k} = kx$