ebene Welle: $f(\underline{r}) \sim \sin(\underline{k}\cdot\underline{r})$

Flächen konstanter Phase $\underline{k}\cdot\underline{r} \perp \underline{k}$

(2) kugelsymmetrisches (Potential) feld: $U = U(r)$

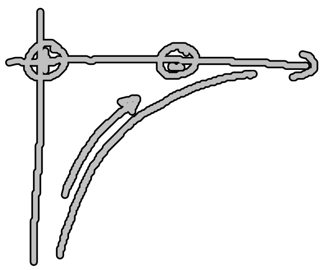
Kugelkoord.: Abstand vom Nullpkt.

„Äquipotential" flächen: $U(r) = \text{const}$

$\longrightarrow r = \text{const.}$

$\hat{=}$ Kugelflächen um $r = 0$

Bsp 1: $U(r) \sim \frac{1}{r}$ ... potentielle Energie einer Test $\begin{cases}\text{masse}\\ \text{ladung}\end{cases}$ im Feld $\begin{cases}\text{eines Massepktes}\\ \text{einer Pkt. ladung}\end{cases}$



Bsp 2: $U(r) \sim \frac{1}{r}\, \underbrace{e^{-\varkappa r}}$

fällt auf Länge $\varkappa^{-1}$ auf null ab

Abschirmlänge

... Yukawa-Potential

(3) zylindersymmetr. (Potential) feld: $U = U(\varrho)$ (6.4)

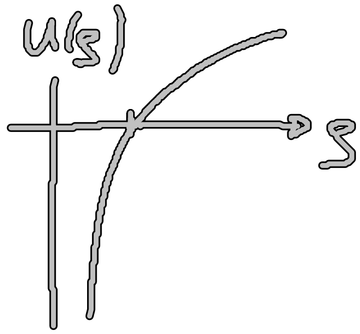
Zyl. koord. Abstand von z-Achse

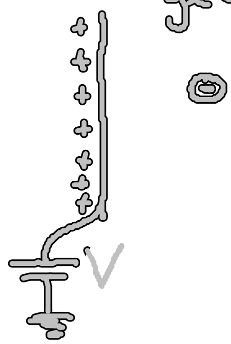
„Äquipotential" fläche: $U(\varrho) = \text{const.}$

$\longrightarrow \varrho = \text{const.}$

$\hat{=}$ Zylinderfläche um die z-Achse

Bsp: $U(\rho) \sim \ln \rho$ (6.5) ... pot. Energie einer Testladung im Feld eines unendlich langen, homog. geladenen Drahtes





6.2 Vektorfelder

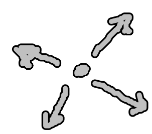
- Vektorfeld $\underline{a}(\underline{r})$: ordnet jedem Punkt P im Raum einen Vektor $\in V_P$ zu

  Bsp: Kraft $\underline{F}$, Geschwindigkeit (z.B. in Flüssigkeit) elektr. ($\underline{E}$)/magnet ($\underline{H}$) Feld ...

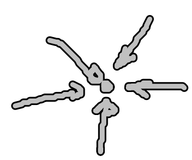
- Bsp:

(1) kugelsymmetr. (Quellen/Senken-) Feld:

$$\underline{a}(\underline{r}) = \pm \underbrace{a(r)}_{>0} \underline{e}_r$$



„Quelle"



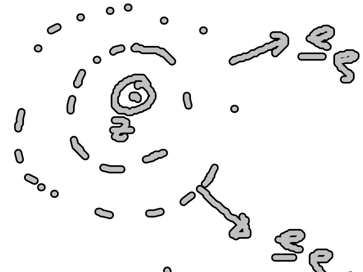
„Senke"

Bsp: $\underline{a}(r) \sim \frac{1}{r^2} \underline{e}_r$ ... (6.7)

... (i) $\underline{E}$-Feld einer Pkt.ladung

(ii) Kraft auf Test$\left\{\begin{array}{l}\text{Masse}\\ \text{ladung}\end{array}\right.$ im Feld $\left\{\begin{array}{l}\text{eines Massenpktes,}\\ \text{einer Pkt.ladung}\end{array}\right.$

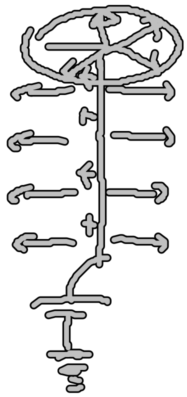
(2) zylindersymmetr. Feld: $\underline{a}(\underline{r}) = a(\rho)\, \underline{e}_\rho$ (6.8)



Bsp: $\underline{a}(\underline{r}) \sim \frac{1}{\varrho}\,\underline{e}_\varrho$ (6.9)

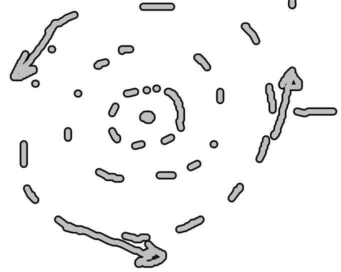
... (i) $\underline{E}$-Feld eines hom. geladenen Drahtes

(ii) Kraft auf Testladung im Feld eines hom. gelad. Drahtes



(3) (zylindersymmetr.) Wirbelfeld („Vortex")

$$\underline{v}(\underline{r}) = f(\varrho, z)\,\underline{\omega}\,\underline{e}_\varphi \quad (6.10)$$



$|\underline{v}(\underline{r})| = f(\varrho, z)\,\omega$

Magnetfeldern, Flüssigkeiten, Tornados

Bsp: 1: $\underline{v}(\underline{r}) = \omega\varrho\,\underline{e}_\varphi$ mit $|\underline{v}| = \omega\varrho$!

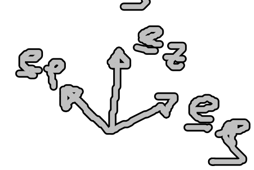
$$\overset{!}{=} \underline{\omega} \times \underline{r} \quad (6.11)$$

„Wirbelstärke", $\underline{\omega} = \omega\,\underline{e}_z$

Beweis: $\underline{\omega} = \omega\,\underline{e}_z$, $\underline{r} = \varrho\,\underline{e}_\varrho + z\,\underline{e}_z$

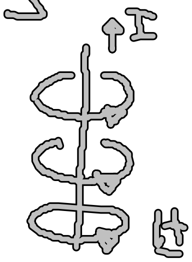
mit $\underline{e}_z \times \underline{e}_\varrho = \underline{e}_\varphi$

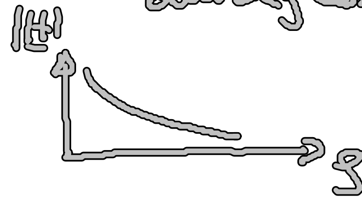
$\underline{e}_z \times \underline{e}_z = 0$



$\longrightarrow \underline{\omega} \times \underline{r} = \omega \rho \, \underline{e}_\varphi$ ged

Bsp2: $\underline{H}(\underline{r}) \sim \frac{I}{\rho} \underline{e}_\varphi$ (6.12) ... Magnet-Feld eines mit Strom I durchflossenen Leiters

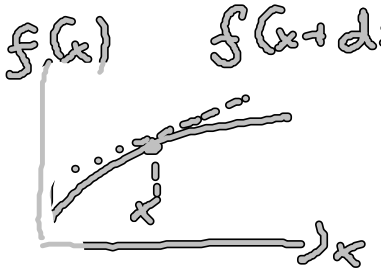




6.3 Vollständiges Differential einer Funktion in 3D

• 1D: Erinnerung: Geg: $f(x)$

Wert in Nachbarschaft von x: Taylorentwicklung [HM]



$$f(x+dx) = \underbrace{f(x) + \frac{df}{dx}dx}_{\text{„Gerade"}} + \underbrace{O(2)}_{\text{Terme: } (dx)^n,\ n \geq 2} \qquad (6.13)$$

Def:

$$\boxed{\text{vollständiges Differential} \quad df(x) = \frac{df}{dx}dx} \qquad (6.14)$$

$$\longrightarrow f(x+dx) - f(x) = df + O(2) \qquad (6.15)$$

• 3D: Geg: $f(x_1, x_2, x_3)$

Wert in Nachbarschaft von $\{x_1, x_2, x_3\}$

$$f(x_1+dx_1, x_2+dx_2, x_3+dx_3) \overset{\text{mit (6.13)}}{\underset{\text{sukzessive}}{=}}$$

$$\underbrace{f(x_1+dx_1,\, x_2+dx_2,\, x_3)}_{\vdots} + \underbrace{\left.\frac{\partial f}{\partial x_3}\right|_{\substack{x_1+dx_1\\ x_2+dx_2\\ x_3}}}_{} dx_3$$

$$f(x_1, x_2, x_3) + \left.\frac{\partial f}{\partial x_1}\right|_{x_1,x_2,x_3} dx_1 + \left.\frac{\partial f}{\partial x_2}\right|_{x_1,x_2,x_3} dx_2$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x_3}\right|_{\substack{x_1+dx_1\\ x_2,x_3}} + \underbrace{\frac{\partial^2 f}{\partial x_2\, \partial x_3} dx_2}_{\longrightarrow\, O(2)} \approx \left.\frac{\partial f}{\partial x_3}\right|_{x_1,x_2,x_3}$$

$$\longrightarrow f(x_1+dx_1,\, x_2+dx_2,\, x_3+dx_3) - f(x_1,x_2,x_3) = df + O(2) \qquad (6.16)$$

<u>Def</u>: $\boxed{\begin{array}{l}\text{vollständiges Differential}\\ df = \dfrac{\partial f}{\partial x_i} dx_i\end{array}}$ (6.17)

NB: $$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_{x_j,\, j\neq i}$$

Bsp: $f(r, \vartheta, \varphi) = r \sin\vartheta \cos\varphi$

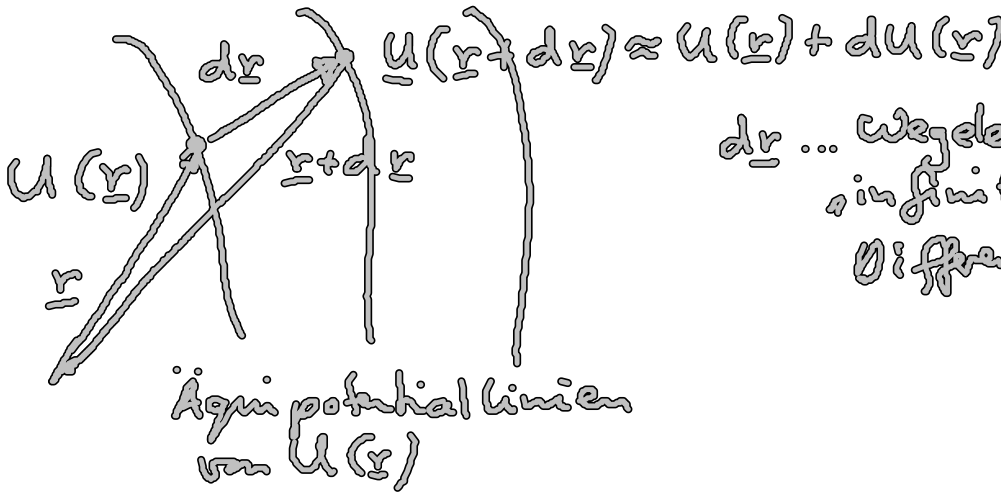
$$\longrightarrow df = \sin\vartheta \cos\varphi\, dr + r\cos\vartheta\cos\varphi\, d\vartheta - r\sin\vartheta\sin\varphi\, d\varphi$$

- Vektorfeld $\underline{a}(x_1, x_2, x_3)$

$$\boxed{d\underline{a} = \frac{\partial \underline{a}}{\partial x_i} dx_i} \qquad (6.18)$$

6.4 Der Nabla-Operator

- zentrale Größe der Vektoranalysis
- Führe ein über Differential eines Skalarfeldes $U(\underline{r})$:



$d\underline{r}$ ... Wegelement „infinitesimaler" Differenzvektor

- einerseits:

$$dU(\underline{r}) = \frac{\partial U}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial U}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial U}{\partial x_3} dx_3 \quad (6.19)$$

andererseits:

Def: Führe „Gradient von U" $=$ grad U als Vektor ein, so daß

$$\boxed{dU(\underline{r}) = \mathrm{grad}\, U \cdot d\underline{r}} \quad (6.20)$$

NB: allgemein gilt: $d\underline{r} \underset{(6.14)}{=} \frac{\partial \underline{r}}{\partial x_i} dx_i \underset{(5.6)}{=} \left|\frac{\partial \underline{r}}{\partial x_i}\right| \underline{e}_i \, dx_i \quad (6.21)$

$\rightarrow$ Vergleich: (6.19) und (6.20) mit (6.21) & $\boxed{\underline{e}_i \cdot \underline{e}_j = \delta_{ij}}$ (6.22)

$$\boxed{\mathrm{grad}\, U = \frac{1}{\left|\frac{\partial \underline{r}}{\partial x_i}\right|} \frac{\partial U}{\partial x_i} \underline{e}_i}$$

... "Gradientenfeld" von U

Beweis: $\mathrm{grad}\, U \cdot d\underline{r}$

$$= \left(\frac{1}{|\cdot\cdot|} \frac{\partial U}{\partial x_i} \underline{e}_i \right) \cdot |\cdot\cdot| \, \underline{e}_j \, dx_j$$

$$(\underline{e}_i \cdot \underline{e}_j = \delta_{ij}) = \frac{\partial u}{\partial x_i} \, dx_i \qquad \text{qed}$$

• (6.22) legt nahe:

Def: Nabla-Operator ≙ Vektor-Differentialoperator

$$\underline{\nabla} = \underline{e}_i \frac{1}{\left|\frac{\partial \underline{r}}{\partial x_i}\right|} \frac{\partial}{\partial x_i} \,, \qquad (6.23)$$

so daß: $\operatorname{grad} U = \underline{\nabla} U$