• **wichtige Anwendungen:** Details s. Kursvorlesungen

(1) Gradientfelder sind wirbelfrei:

Satz:

Geg: $U(\underline{r})$ ... Skalarfeld (2 mal stetig diffbar)

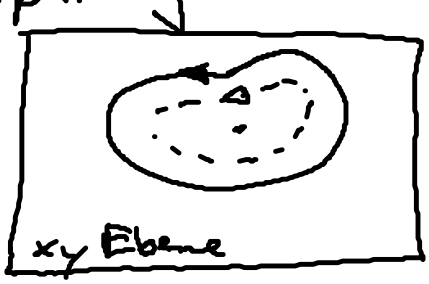
$\underline{a}(\underline{r})$ ... Vektorfeld

im einfachen zusammenhängenden Gebiet (660)

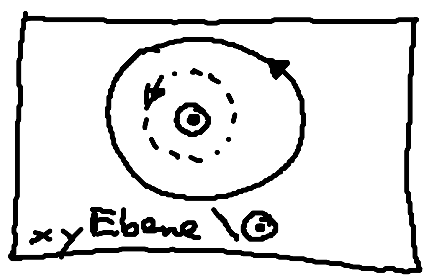
dann: $\underline{a} = \text{grad}\, U \longleftrightarrow \text{rot}\, \underline{a} = 0$

(i) einfach zusammenhängend: alle geschlossenen Kurven lassen sich auf einen Pkt. zusammenziehen!

Bsp 1: ja



Bsp 2: nein



$\underline{a} \sim \frac{1}{\rho} \underline{e}_\varphi$

(ii) Beweis: $\longrightarrow$

$$[\underline{\nabla} \times (\nabla U)]_x = \Big(\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x} - \underbrace{\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}}_{\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}}\Big) U(\underline{r}) = 0$$

$$[\ldots]_y = [\ldots]_z = 0$$

$\longleftarrow$: hier nicht!

(iii) Mechanik: $\underline{F}(\underline{r}) = -\operatorname{grad} U(\underline{r})$

(iv) Ausnahme: $U \sim \ln \varrho \longrightarrow \underline{a} \sim \frac{1}{\varrho}\underline{e}_\varrho$ mit $\operatorname{rot}\underline{a} = 0$, $\varrho \neq 0$

aber: nicht einfach zusammenhängenden Gebiet

(2) Satz: $$\boxed{\operatorname{div}\underline{B} = 0 \longleftrightarrow \underline{B} = \operatorname{rot}\underline{A}} \quad (6.61)$$

E-dynamik!

(3) Laplace-Operator: $$\boxed{\underline{\nabla}^2 = \Delta = \underline{\nabla}\cdot\underline{\nabla}} \quad (6.62)$$

Bsp: Quellen eines Grad.feldes:

$$\underline{\nabla}\cdot(\underline{\nabla}U) = \underline{\nabla}^2 U$$

(i) Potentialtheorie: (E-dynamik, Mechanik)

(ii) QM

Kartes. Koord.: $$\boxed{\underline{\nabla}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}} \quad (6.63)$$

(4) Hauptsatz der Vektoranalysis:

„Quellen & Wirbel bestimmen ein $\underline{a}(\underline{r})$ eindeutig"

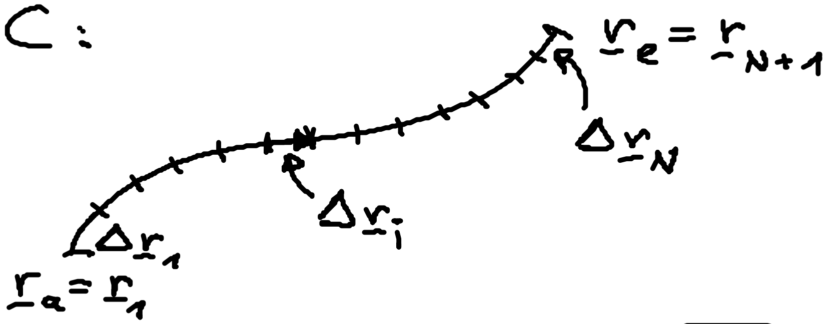
$$\boxed{\underline{a}(\underline{r}) = \underbrace{\underline{a}_t(\underline{r})}_{\operatorname{div}\underline{a}_t = 0} + \underbrace{\underline{a}_L(\underline{r})}_{\operatorname{rot}\underline{a}_L = 0} + \underbrace{\underline{a}_R(\underline{r})}_{\substack{\operatorname{div}\underline{a}_R = \operatorname{rot}\underline{a}_R = 0 \\ \text{für Randbed.}}}} \quad (6.64)$$

7. Integration von Feldern

- verschiedene Typen: Linien- / Flächen- / Volumenintegrale
  (1D) (2D) (3D)
- HM: genaue Def., Berechnung
- **hier**: (1) anschauliche Definition
  [„Integrale = Summen über kleine Terme"]
  (2) Auswahl von Integralen
  (3) physikal. Einsichten (oft) ohne Rechnen
  (4) Satz von Stokes & Gauß

7.1 Linien- / Wegintegral

- Bahnkurve C:



Differenzvektor:

$$\boxed{\underline{r}_e - \underline{r}_a = \sum_{i=1}^{N} \Delta \underline{r}_i \xrightarrow[|\Delta \underline{r}_i| \to 0]{(\Delta \underline{r}_i \to d\underline{r}_i,\ N \to \infty)} \int_{\underline{r}_a}^{\underline{r}_e} d\underline{r}} \qquad (7.1)$$

Berechnung mit Parameterdarstellung von C: (s. Kap. 5.3)

(1) Zeit t: $\underline{r} = \underline{r}(t)$, $\quad d\underline{r} = \underbrace{\frac{d\underline{r}}{dt}}_{\underline{v}(t)} dt \qquad (7.2)$

$(5.19) \left[= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\underline{r}(t+\varepsilon) - \underline{r}(t)}{\varepsilon} \right]$

$$\longrightarrow \quad \underline{r}_e - \underline{r}_a = \underline{r}_e(t_e) - \underline{r}_a(t_a)$$

$$= \int^{t_e} \underline{v}(t)\, dt \qquad (7.3)$$

t_a

in kartesischen Koord.: $\underline{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$, (7.3) $\to$ 1D Integrale

(2) Bogenlänges: $\underline{r} = \underline{r}(s)$, $d\underline{r} = \underbrace{\frac{d\underline{r}}{ds}}_{\hat{\underline{t}}} ds$ (7.4)

$\hat{\underline{t}}$, $|\hat{\underline{t}}| = 1$ (5.26)

$$\to \underline{r}_e - \underline{r}_a = \underline{r}(s_e) - \underline{r}(s_a = 0)$$

$$= \int_{s_a=0}^{s_e} \hat{\underline{t}}(s)\, ds \quad (7.5)$$

· Integrale von Typ: $\boxed{W = \int_C \underbrace{\underline{a}(\underline{r}) \cdot d\underline{r}}}$ (7.6)

„Tangentialkomp. von $\underline{a}$ mal $ds = |d\underline{r}|$"

[Wirbel !!!]

Bsp: von Kraftfeld $\underline{F}(\underline{r})$ verrichtete Arbeit entlang Weg C

$$\boxed{W = \sum_i \underbrace{\underline{F}(\underline{r}_i) \cdot \Delta \underline{r}_i}_{\text{Kraftkomp. in Wegrichtg mal Weg}} \xrightarrow[(\Delta \underline{r}_i \to d\underline{r})]{} \int_{\underline{r}_a}^{\underline{r}_e} \underline{F}(\underline{r}) \cdot d\underline{r}} \quad (7.7)$$

Berechnung:

(1) Zeitdarstellung: $W \overset{(7.2)}{=} \int_{t_a}^{t_e} \underbrace{\underline{F}(\underline{r}(t)) \cdot \underline{v}(t)}_{\text{Funktion von } t} dt$ (7.8)

$\to$ 1D Integral

(2) Bogenlängen-Darstellung:

$$W \overset{(7.4)}{=} \int^{s_e} \underbrace{\underline{F}(\underline{r}(s)) \cdot \hat{\underline{t}}(s)}\, ds \quad (7.9)$$

$s_a = 0$ Funktion von s

$\to$ 1D Integral

Bsp: $\underline{F}(\underline{r}) = k\,\underline{r}$ ... 3D-Federkraft
harmonische Kraft

Weg von $\underline{r}_a = \underline{0}$ entlang $\underline{r} = x\,\underline{e}_x$ nach $\underline{r}_e = x_e\,\underline{e}_x$

$\longrightarrow \quad x = s$

$$\left.\begin{aligned} \underline{F}(\underline{r}(s)) &= k\,x\,\underline{e}_x \\ d\underline{r} &= \underbrace{\frac{d\underline{r}}{dx}}_{\hat{\underline{t}}}\,dx = \underline{e}_x\,dx \end{aligned}\right\} \to W = \int_{x=0}^{x_e} k\,x\,dx = \frac{k}{2}x^2\Big|_{x=0}^{x_e} = \frac{k}{2}x_e^2 \;!$$

$\underline{F}(\underline{r})\cdot d\underline{r} = k\,x\,dx$

- geschlossene Kurve C: $\underline{r}_e = \underline{r}_a$!!

$$\boxed{\oint_C \underline{a}(\underline{r})\cdot d\underline{r}} \quad (7.10)$$

... Zirkulation

7.2 Flächenintegrale

- Typ der Integrale:

Fluß von $\underline{a}(\underline{r})$ durch Fläche F:

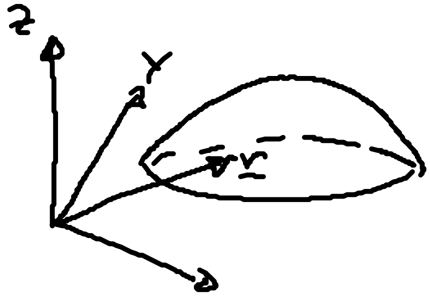
$$Q = \int_F \underline{a}(\underline{r})\cdot d\underline{f} \quad \text{mit Flächenelement } d\underline{f} = df\,\hat{\underline{\nu}} \quad (7.11)$$

Normalenvektor auf
F bei $\underline{r}$ mit $|\hat{\underline{\nu}}| = 1$

NB: vgl. Deutung von $\underline{\nabla} \cdot \underline{a}$
in Kap. 6.5.

- Punkte auf Fläche F im Raum: $\underline{r} = \underline{r}\underbrace{(u,v)}_{2\text{ Variablen}}$ (7.12)

Bsp:



Fläche über x,y-Ebene $\xrightarrow{\text{möglich}}$ $(u,v) = (x,y)$

Bsp: $x, y, \; z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$
... Halbkugel mit $z > 0$
und Radius $= 1$

allgemeine Fläche ....