• **wichtige Anwendungen:** Details s. Kursvorlesungen

(1) Gradientfelder sind wirbelfrei:

Satz:

Geg: $\underline{U}(\underline{r})$ ... Skalarfeld (2 mal stetig diffbar)

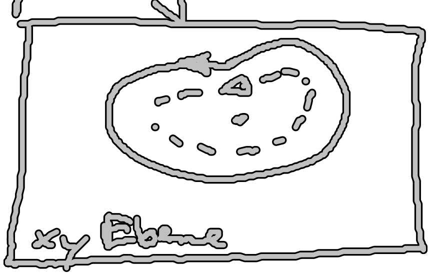
$\underline{a}(\underline{r})$ ... Vektorfeld

im einfachen zusammenhängenden Gebiet

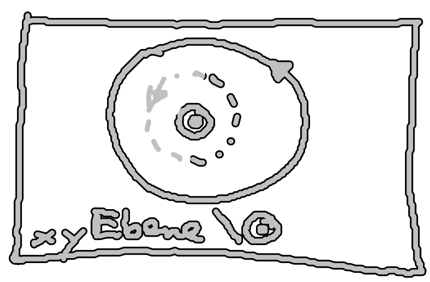
dann: $\underline{a} = \operatorname{grad} U \longleftrightarrow \operatorname{rot} \underline{a} = 0$ (650)

(i) einfach zusammenhängend: alle geschlossenen Kurven lassen sich auf einen Pkt. zusammenziehen!

Bsp1: ja



Bsp2: nein



$\underline{a} \sim \frac{1}{\rho} e_\varphi$

(ii) Beweis: $\longrightarrow$

$$[\underline{\nabla} \times (\nabla U)]_x = \Big(\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x} - \underbrace{\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}}_{\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}}\Big) U(\underline{r}) = 0$$

$$[\ldots]_y = [\ldots]_z = 0$$

$\longleftarrow$: hier nicht!

(iii) Mechanik: $\underline{F}(\underline{r}) = -\operatorname{grad} U(\underline{r})$

(iv) Ausnahme: $U \sim \ln \varrho \longrightarrow \underline{a} \sim \frac{1}{\varrho}\, \underline{e}_\varrho$ mit $\operatorname{rot} \underline{a} = 0$, $\varrho \neq 0$

aber: nicht einfach zusammenhängendes Gebiet

(2) Satz: $\boxed{\operatorname{div} \underline{B} = 0 \longleftrightarrow \underline{B} = \operatorname{rot} \underline{A}}$ (6.61)

E-dynamik!

(3) Laplace-Operator: $\boxed{\underline{\nabla}^2 = \Delta = \underline{\nabla} \cdot \underline{\nabla}}$ (6.62)

Bsp: Quellen eines Grad. feldes:

$$\underline{\nabla} \cdot (\underline{\nabla} U) = \underline{\nabla}^2 U$$

(i) Potentialtheorie: (E-dynamik, Mechanik)

(ii) QM

kartes. Koord: $\boxed{\underline{\nabla}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}}$ (6.63)

(4) Hauptsatz der Vektoranalysis:

„Quellen & Wirbel bestimmen ein $\underline{a}(\underline{r})$ eindeutig"

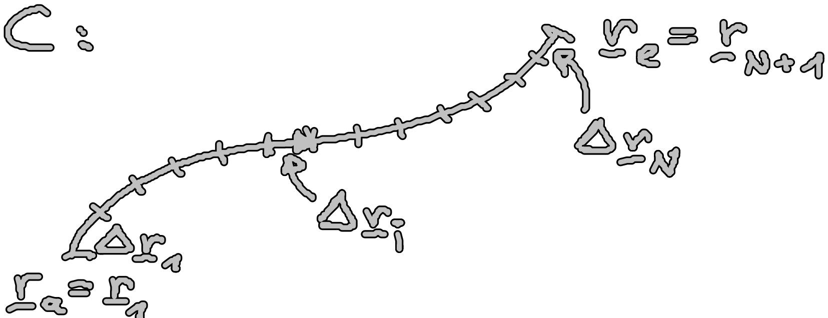
$$\boxed{\underline{a}(\underline{r}) = \underbrace{\underline{a}_t(\underline{r})}_{\operatorname{div} \underline{a}_t = 0} + \underbrace{\underline{a}_L(\underline{r})}_{\operatorname{rot} \underline{a}_L = 0} + \underbrace{\underline{a}_R(\underline{r})}_{\substack{\operatorname{div} \underline{a}_R = \operatorname{rot} \underline{a}_R = 0 \\ \text{für Randbed.}}}}$$ (6.64)

7. Integration von Feldern

- verschiedene Typen: Linien-/Flächen-/Volumenintegrale
  (1D) (2D) (3D)
- HM: genaue Def., Berechnung
- hier: (1) anschauliche Definition
  [„Integrale = Summen über kleine Terme"]
  (2) Auswahl von Integralen
  (3) physikal. Einsichten (oft) ohne Rechnen
  (4) Satz von Stokes & Gauß

7.1 Linien-/Wegintegral

- Bahnkurve C:



Differenzvektor:

$$\boxed{\underline{r}_e - \underline{r}_a = \sum_{i=1}^{N} \Delta \underline{r}_i \xrightarrow[\substack{N \to \infty \\ |\Delta \underline{r}_i| \to 0}]{(\Delta \underline{r}_i \to d\underline{r}_i)} \int_{\underline{r}_a}^{\underline{r}_e} d\underline{r}} \qquad (7.1)$$

Berechnung mit Parameterdarstellung von C: (s. Kap. 5.3)

(1) Zeit t: $\underline{r} = \underline{r}(t)$, $d\underline{r} = \underbrace{\frac{d\underline{r}}{dt}}_{\underline{v}(t)} dt$ (7.2)

(5.19) $\left[= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\underline{r}(t+\varepsilon) - \underline{r}(t)}{\varepsilon} \right]$

$$\longrightarrow \underline{r}_e - \underline{r}_a = \underline{r}_e(t_e) - \underline{r}_a(t_a)$$

$$= \int^{t_e} \underline{v}(t)\, dt \qquad (7.3)$$

in kartesischen Koord.: $\underline{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$, (7.3) $\longrightarrow$ 1D Integrale t_a

(2) Bogenlänge s: $\underline{r} = \underline{r}(s)$, $\quad d\underline{r} = \underbrace{\frac{d\underline{r}}{ds}}_{\hat{\underline{t}},\ |\hat{\underline{t}}|=1 \ (5.26)} ds$ (7.4)

$$\rightarrow \underline{r}_e - \underline{r}_a = \underline{r}(s_e) - \underline{r}(s_a = 0)$$

$$= \int_{s_a=0}^{s_e} \hat{\underline{t}}(s)\, ds \quad (7.5)$$

• Integrale vom Typ: $\boxed{W = \int_C \underbrace{\underline{a}(\underline{r}) \cdot d\underline{r}}}$ (7.6)

„Tangentialkomp. von $\underline{a}$ mal $ds = |d\underline{r}|$"

[Wirbel !!!]

Bsp: von Kraftfeld $\underline{F}(\underline{r})$ verrichtete Arbeit entlang Weg C

$$\boxed{W = \sum_i \underbrace{\underline{F}(\underline{r}_i) \cdot \Delta \underline{r}_i}_{\text{Kraftkomp. in Wegrichtg mal Weg}} \xrightarrow[(\Delta \underline{r}_i \to d\underline{r})]{} \int_{\underline{r}_a}^{\underline{r}_e} \underline{F}(\underline{r}) \cdot d\underline{r}} \quad (7.7)$$

Berechnung:

(1) Zeitdarstellung: $W \overset{(7.2)}{=} \int_{t_a}^{t_e} \underbrace{\underline{F}(\underline{r}(t)) \cdot \underline{v}(t)}_{\text{Funktion von } t} dt$ (7.8)

$\rightarrow$ 1D Integral

(2) Bogenlängen-Darstellung:

$$W \overset{(7.4)}{=} \int^{s_e} \underbrace{\underline{F}(\underline{r}(s)) \cdot \hat{\underline{t}}(s)}\, ds \quad (7.9)$$

$s_a = 0$ Funktion von s

$\rightarrow$ 1D Integral

Bsp: $\underline{F}(\underline{r}) = k\,\underline{r}$ ... 3D-Federkraft
harmonische Kraft

Weg von $\underline{r}_a = \underline{0}$ entlang $\underline{r} = x\,\underline{e}_x$ nach $\underline{r}_e = x_e\,\underline{e}_x$

$\longrightarrow \quad x = s$

$$\left.\begin{array}{l} \underline{F}(\underline{r}(s)) = k x\,\underline{e}_x \\ d\underline{r} = \underbrace{\dfrac{d\underline{r}}{dx}}_{\underline{t}} dx = \underline{e}_x\,dx \end{array}\right\} \rightarrow W = \int_{x=0}^{x_e} kx\,dx = \frac{k}{2}x^2 \Big|_{x=0}^{x_e} = \frac{k}{2}x_e^2 \; !$$

$\underline{F}(\underline{r})\cdot d\underline{r} = kx\,dx$

- geschlossene Kurve C: $\underline{r}_e = \underline{r}_a$!!

$$\boxed{\oint_C \underline{a}(\underline{r})\cdot d\underline{r}} \quad (7.10) \quad \text{... Zirkulation}$$

7.2 Flächenintegrale

- Typ der Integrale:

Fluß von $\underline{a}(\underline{r})$ durch Fläche F:

$$Q = \int_F \underline{a}(\underline{r})\cdot d\underline{f} \quad (7.11)$$

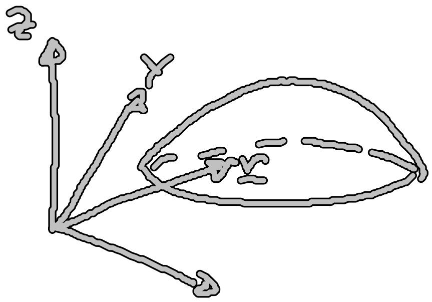
mit Flächenelement $d\underline{f} = df\,\hat{\underline{\nu}}$

Normalenvektor auf F bei $\underline{r}$ mit $|\hat{\underline{n}}| = 1$

NB: vgl. Deutung von $\underline{\nabla} \cdot \underline{a}$ in Kap. 6.5.

- Punkte auf Fläche F im Raum: $\underline{r} = \underline{r}\underbrace{(u,v)}_{2\text{ Variablen}}$ (7.12)

Bsp:



Fläche über x,y-Ebene $\xrightarrow{\text{möglich}}$ $(u,v) = (x,y)$

Bsp: $x, y, \; z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$

... Halbkugel mit $z > 0$ und Radius $= 1$

allgemeine Fläche ....