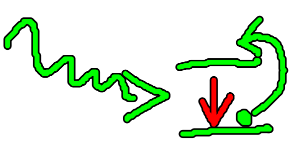


Resonanz-Fluoreszenz

Mastergl.: RF Cook PRA $\underline{23}$, 1243 (81)

Ω Rabifrequ.

$$\dot{\rho}_t^{(n)} = i\frac{\Omega}{2}\left[\sigma_+ + \sigma_-, \rho_t^{(n)}\right]$$
$$- \beta\left(\sigma_+\sigma_-\rho_t^{(n)} + \rho_t^{(n)}\sigma_+\sigma_- - \underline{2\sigma_-\rho_t^{(n-1)}\sigma_+}\right),$$

β Emissions-rate

$$\mathcal{J}\rho \equiv 2\beta\sigma_-\rho\sigma_+ =$$
$$= 2\beta|-\rangle\langle+|\rho\,|+\rangle\langle-|$$

Übergang $|+\rangle \longrightarrow |-\rangle$

(n) Zählindex für Anzahl der emittierten Photonen.

- Dichteoperator aufspalten als

$$\rho_t = \sum_{n=0}^{\infty} \rho_t^{(n)}$$

Definiere $p_n(0,t) \equiv \mathrm{Tr}\,\rho_t^{(n)}$: Wahrscheinlichkeit für n Photonen nach Zeit t.

- Erzeugende Funktion $\hat{G}$: Summation über n, Multipl. mit s^n

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} G = i\frac{\Omega}{2}[\sigma_+ + \sigma_-, G] - \beta(\sigma_+\sigma_- G + G\sigma_+\sigma_- - 2s\sigma_- G\sigma_+)$$

Formal lösen

$$G(t) = e^{(\mathcal{L}_0 + s\mathcal{J})t}\,\rho(0)$$

$$\left(G = \sum_{n=0}^{\infty} s^n \rho_t^{(n)} = G(t;s) \right)$$

Laplacetrafo:

$$\hat{G}(z;s) = \underbrace{[z - \mathcal{L}_0 - s\mathcal{J}]^{-1}}\,\rho(0)$$

$$= \begin{pmatrix} z+2\beta & 0 & 0 & -\Omega \\ -2\beta s & z & 0 & \Omega \\ 0 & 0 & z+\beta & 0 \\ \frac{\Omega}{2} & -\frac{\Omega}{2} & 0 & z+\beta \end{pmatrix}^{-1}$$

(üA)

$\rightarrow$ Wir brauchen die Spur Tr

$$\mathrm{Tr}\,\hat{G}(z;s) = \frac{f(z)}{z f(z) + \beta\Omega^2(1-s)}$$

$$f(z) \equiv (z+\beta)(z+2\beta) + \Omega^2$$

für $\varrho_{t=0} = 1$

Diskussion: 1) Für $s=1$ folgt $\mathrm{Tr}\,\hat{G}(z;1) = \frac{1}{z}$

$$\Rightarrow \mathrm{Tr}\,G(t;s=1) = 1 \text{ (Normierung)}$$

$$\left[(\mathcal{L}f)(z) = \hat{f}(z) \equiv \int_0^\infty dt\, f(t)\, e^{-zt} \right]$$

denn $\mathrm{Tr}\,\varrho_t = 1 = \mathrm{Tr}\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \varrho_t^{(n)}}_{G(t;s=1)}$

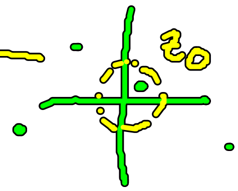
$$\mathrm{Tr}\,G(s,t) = \mathrm{Tr}\sum_{n=0}^{\infty} \varrho_t^{(n)} s^n$$

$$p_n(0,t) = \frac{\partial^n}{\partial s^n}\mathrm{Tr}\,G(s,t)\Big|_{s=0}\frac{1}{n!}$$

$$\langle n \rangle_t = \frac{\partial}{\partial s} \operatorname{Tr} G(s,t)\Big|_{s=1} = \operatorname{Tr} \sum_{n=0}^{\infty} n \rho_t^{(n)}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} n\, p_n(0,t)$$

entsprechend $\langle n^2 \rangle_t$ etc.: ÜA



Zurücktransformieren in die Zeit-Domäne:

Asymptotisch für $t \to \infty$: man braucht z_0, Pol nahe $z=0$:

$$z_0 = \sum_{m=1}^{\infty} c_m (s-1)^m \quad \text{Entwicklung}$$

$$\Rightarrow \quad \langle n \rangle_{t\to\infty} = \frac{\beta \Omega^2}{2\beta^2 + \Omega^2}\, t$$

$$\sigma_t^2 \equiv \langle \Delta n^2 \rangle_{t\to\infty} = \langle n \rangle_{t\to\infty} \left[1 - \frac{6\beta\Omega^2}{(2\beta^2+\Omega^2)^2} \right]$$

- Kumulanten sind prop. zu t für $t \gg \frac{1}{\beta}$

Mandel Q-Parameter $Q \equiv F - 1$

Fano-Faktor $\equiv \dfrac{\langle \Delta n^2 \rangle}{\langle n \rangle} < 1$

$$F = \begin{cases} >1 & \text{Super} \sim \\ 1 & \text{Poissonisch} \\ <1 & \text{Sub} \sim \end{cases}$$

Quantum Jump Approach (Quantum Trajectory Approach)

„Problem" der üblichen Dichteoperatoren: zu groß (N^2)

- Methode zur numerischen Lösung von Mastergl.
- Markov-Näherung + Lindblad
- stammt aus der Quantenoptik: insbesondere einzelne Quantensysteme, z.B. Ion in einer Falle.

„Unravelling" (Zerlegung der Mastergleichung)

Beispiel: Mastergl. für gedämpften harm. Oszillator

$$\frac{d}{dt}\rho(t) = -i\Omega[a^\dagger a, \rho] - \kappa\{a^\dagger a\rho + \rho a^\dagger a - 2a\rho a^\dagger\}$$

Annahme: Zur Zeit $t=0$ ist $\rho(0) = |\Psi\rangle\langle\Psi|$

Dann Zeitentwicklung im Intervall Δt

$$|\Psi\rangle\langle\Psi| \longrightarrow |\Psi\rangle\langle\Psi| +$$

$$+\Delta t\{\mathcal{L}_0 |\Psi\rangle\langle\Psi| + \mathcal{L}_1 |\Psi\rangle\langle\Psi|\}$$

$$\mathcal{L}_0\rho \equiv -iH_{eff}\rho + \rho\, i H_{eff}^\dagger;$$

$$H_{eff} \equiv H - i\kappa a^\dagger a = \Omega a^\dagger a - i\kappa a^\dagger a$$

$$\Sigma_1 \rho \equiv 2\kappa\, a \rho a^\dagger$$

Σ_0: erzeugt Zeitentwicklung mit nicht-Hermiteschen „Hamiltonian" H_{eff}

Σ_1: erzeugt Quantensprung $\langle\psi| \to i H_{eff}^\dagger \langle\psi|$

$$\Sigma_0 : \quad |\psi\rangle \longrightarrow -iH_{eff}|\psi\rangle$$

$$\Sigma_1 : \quad |\psi\rangle \longrightarrow \sqrt{2\kappa}\, a|\psi\rangle$$

$$\langle\psi| \longrightarrow \sqrt{2\kappa}\, \langle\psi| a^\dagger$$

$$\frac{d}{dt}\rho(t) = (\Sigma_0 + \Sigma_1)\rho(t)$$

WW Bild:

$$\bar\rho(t) \equiv e^{-\Sigma_0 t}\rho(t) ; \quad \rho = e^{\Sigma_0 t}\bar\rho$$

$$\bar\Sigma_1(t) \equiv e^{-\Sigma_0 t}\,\Sigma_1\, e^{\Sigma_0 t}$$

$$\boxed{\frac{d}{dt}}\bar\rho(t) = -\Sigma_0\bar\rho(t) + \underbrace{e^{-\Sigma_0 t}(\Sigma_0+\Sigma_1)e^{\Sigma_0 t}}_{\Sigma_0 + \bar\Sigma_1(t)}\bar\rho(t)$$

$$= \boxed{\bar\Sigma_1(t)\bar\rho(t)}$$

$\Rightarrow$ Formal lösen als

$$\bar\rho(t) = \rho(0) + \int_0^t dt_1\, \bar\Sigma_1(t_1)\,\bar\rho(t_1)$$

$$= \rho(0) + \int_0^t dt_1\, \bar\Sigma_1(t_1)\,\rho(0) + \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2\, \bar\Sigma_1(t_1)\bar\Sigma_1(t_2)\,\bar\rho(t_2)$$

$$= \rho(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t dt_1 \dots \int_0^{t_{n-1}} dt_n\, \bar\Sigma_1(t_1)\dots\bar\Sigma_1(t_n)\,\rho(0)$$