

3.2. Das freie Maxwellfeld

elektromagnetische Feld im Vakuum ($\rho = 0 = \vec{j}$)

$$H = E = \int d^3r \left(\frac{\epsilon_0}{2} |\vec{E}(\vec{r}, t)|^2 + \frac{1}{2\mu_0} |\vec{B}(\vec{r}, t)|^2 \right)$$

Energie dichte aus ED $\hat{=} \int d^3r \mathcal{H}(\vec{r}, t)$

Analogie: $H = T + V \rightarrow L = T - V$

rate von \mathcal{L}

$$\mathcal{L} = \frac{\epsilon_0}{2} \vec{E}^2 - \frac{1}{2\mu_0} \vec{B}^2$$

Feld variational: Potentiale

$$\vec{E} = -\underbrace{\vec{\nabla}\phi}_{\vec{E}_L} - \underbrace{\partial_t \vec{A}}_{\vec{E}_T}, \quad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$
$$= \vec{E}_L + \vec{E}_T$$

Coulombgleichung $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$

Vektortheorie von Helmholtz:

\rightarrow

Jedes Vektorfeld \vec{X} kann man zerlegen in einen transversalen und einen longitudinalen Anteil.

$$\vec{X} \uparrow \quad \vec{X} \rightarrow$$

$$\quad \downarrow \quad \downarrow$$

$$\quad \vec{k} \quad \quad \vec{k}$$

$$\vec{X} = \vec{X}_L + \vec{X}_T$$

die Rotation
dieses Anteils
verschwindet

die Divergenz
dieses Anteils
verschwindet

$$\vec{X}_T = \vec{X} + \frac{1}{4\pi} \vec{\nabla} \int d^3r' \frac{\vec{\nabla}' \cdot \vec{X}(r')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

Herleitung der Gleichungen für ϕ, \vec{A} :

$$\square \vec{A} = 0, \quad \Delta \phi = 0 \quad \text{in Lorenzbedingung}$$

$$\mathcal{L} = \frac{\epsilon_0}{2} \left\{ (\vec{\nabla} \phi)^2 + 2 \vec{\nabla} \phi \cdot \dot{\vec{A}} + \dot{\vec{A}}^2 \right\} - \frac{1}{2\mu_0} (\vec{\nabla} \times \vec{A})^2$$

E^2 B^2

(i) Ableitung des gl. f. skalares Potential ϕ

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}_{1i}}}_{=0} + \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}_{1i}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi}$$

and
 $2 \nabla \phi \cdot \vec{A}$
 dielectric

$$= 0 + \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{\phi}_{1i}} \left(\frac{\epsilon_0}{2} \sum_{\mu} \dot{\phi}_{1\mu}^2 \right) \right) = 0 \quad (*)$$

$$+ \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\epsilon_0}{2} \sum_{\mu} \dot{\phi}_{1\mu} \underbrace{\frac{\partial \dot{\phi}_{1\mu}}{\partial \dot{\phi}_{1i}}}_{\delta_{\mu i}} \right) = 0$$

$$\sum_i \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial x_i} \dot{\phi}_{1i} = 0$$

$$\sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_i} \phi = 0$$

besteht aus: $\boxed{\Delta \phi = 0}$

* - Bemerkung: fällt weg in Coulombbedg.

$$L_{\nabla \phi \cdot \vec{A}} = \frac{\epsilon_0}{2} \int d\tau \underbrace{2 \nabla \phi \cdot \vec{A}}_{\uparrow}$$

$$= \frac{\epsilon_0}{2} \int d^3r \phi \underbrace{\vec{\nabla} \cdot \dot{\vec{A}}}_{\substack{\text{Randterm} \\ \rightarrow 0}} + \text{Randterm} \rightarrow 0$$

$$0 = \vec{\nabla} \cdot \vec{A}$$

(ii) Ableitg. der Gleichg. f. Vektorpotential

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_{x|t}} + \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_{x|j}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_x}$$

(1)
(2)
(3)

$$\textcircled{1} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial}{\partial A_{x|t}} \frac{\epsilon_0}{2} \left(\sum_u A_{u|t}^2 + 2\phi_{|t} \cdot A_{u|t} \right) \right)$$

$$= \frac{\epsilon_0}{2} \frac{\partial}{\partial t} \sum_u \left(2A_{u|t} + 2\phi_{|t} \right) \underbrace{\frac{\partial A_{u|t}}{\partial A_{x|t}}}_{\delta_{ux}}$$

$$= \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(A_{x|t} + \phi_{|x} \right)$$

$$= -\epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} E_x$$

$$\textcircled{2} \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_{x|j}} = -\frac{1}{2\mu_0} \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial A_{x|j}} (\vec{\nabla} \times \vec{A})^2$$

$$= -\frac{1}{2\mu_0} \sum_j \partial_{x_j} 2(\vec{\nabla} \times \vec{A}) \cdot \partial_{A_{x/j}} \underbrace{\begin{pmatrix} A_{2/y} - A_{y/2} \\ A_{x/2} - A_{2/x} \\ A_{y/x} - A_{x/y} \end{pmatrix}}_{\text{rot } \vec{A}}$$

$$= -\frac{1}{\mu_0} (0 + \partial_z B_y - \partial_y B_z)$$

$$= \mu_0^{-1} (\vec{\nabla} \times \vec{B})_x$$

$$\textcircled{3} \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_x} = 0 \quad E_{y1}, E_{z2} \text{ analog}$$

$$\begin{array}{ccc} \textcircled{1} & \textcircled{2} & \textcircled{3} \\ -\epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \vec{E} + \vec{\nabla} \times \vec{B} \stackrel{1}{\mu_0} = 0 & & \\ \downarrow & & \\ -\epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \vec{E}_L + \epsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{A} + \frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{A} = 0 & & \end{array}$$

Vakuum

$$\vec{E}_L = 0$$

$$\frac{1}{c^2} \ddot{\vec{A}} - \Delta \vec{A} = 0$$

→ →

$$\nabla \cdot \vec{A} = 0$$

$\boxed{\nabla \cdot \vec{A} = 0}$ ist bestätigt

$$\vec{E} = \underbrace{-\nabla\phi}_{E_L} - \partial_t \vec{A}$$

Das \mathcal{L} für das freie Maxwellfeld ist damit bestätigt.

4. Lagrange-Technik f. wechselwirkende

Schrödinger- und Maxwellfeld

bisheriges \mathcal{L} reproduziert als $\mathcal{L} = \mathcal{L}_S + \mathcal{L}_M$
die freien Felder ohne WW.

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_S + \mathcal{L}_M + \mathcal{L}_{WW}$$

Der Wechselwirkungsterm wird folgendermaßen
erzeugt:

$$1) \quad T_{kin} \rightarrow T_{kin} - V$$

$$V = q\phi + U$$

← WW und Potential

elektrisch Feldarbeit
(potentielle Energie
einer Ladung)

Potentialhöfche
ohne elektr. Feld
z.B. Quarkfelder
Quarkpunkte

$$2) \quad \vec{p} \rightarrow \vec{p} - q \vec{A}$$

weil Vektorpotential an Ladung anhängt

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2m} \left(\frac{\hbar}{i} \vec{\nabla} + \underset{2)}{q \vec{A}} \right) \psi^* \left(\frac{\hbar}{i} \vec{\nabla} - \underset{2)}{q \vec{A}} \right) \psi - \underset{1)}{\psi^* (q\phi + U) \psi}$$

$$- \frac{i\hbar}{2} \left(\psi_{/t}^* \psi - \psi^* \psi_{/t} \right)$$

$$+ \frac{\epsilon_0}{2} \left((\nabla\phi)^2 + 2 \vec{\nabla}\phi \cdot \dot{\vec{A}} + (\partial_t \vec{A})^2 \right)$$

$$- \frac{1}{2\mu_0} \left(\vec{\nabla} \times \vec{A} \right)^2$$

Das ist die Lagrangefunktion für

Ladungsträgerfeld der Ladung q im

elektromagnetische Feld (ϕ, \vec{A})

Man muß noch zeigen, daß die
Bewgungsgl. (Schrödingergl., Maxwellgl.)
stimmen:

(i) Schrödingers feld

$$i\hbar \partial_t \psi = \left[\frac{(\mathbf{p} - q\vec{A})^2}{2m} + (q\phi + U) \right] \psi$$

Maxwell felder

(ii) $\phi = ?$

$$\Delta \phi = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = \frac{1}{\epsilon_0} - q \psi^* \psi$$

$$\Delta \phi = - \frac{q \psi^* \psi}{\epsilon_0} \quad \checkmark$$

$$\rho = q \underbrace{\psi^*(r, t) \psi(r, t)}_{\text{Auftrittswahrsch. - Dichte}}$$

(iii) $-\square \vec{A} = \frac{1}{c^2} \partial_t \vec{E}_L + \mu_0 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{A}}$

$\underbrace{\hspace{10em}}$
 hatten wir schon

\uparrow
 muß dabei sein $\neq 0$
 denn in Matrix $\neq 0$

\uparrow
 durch WW

$$-\square \vec{A} = \mu_0 \frac{q}{2m} \left\{ \psi^* (\vec{p} - q\vec{A}) \psi + c.c. \right\} + \epsilon_0 \partial_t (-\nabla \phi)$$

aus der \vec{E} -Dynamik $\square \vec{A} = -\mu_0 \vec{j}_T$

$$\vec{j} = \frac{q}{2m} \left(\psi^* (\vec{p} - q\vec{A}) \psi + c.c. \right)$$

um \vec{j}_T zu bekommen:

$$\epsilon_0 \partial_t (-\nabla \phi) = -\frac{\epsilon_0}{4\pi \epsilon_0} \partial_t \nabla \int \frac{d\vec{r}' \rho(\vec{r}', t)}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

$$\Delta \phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} = \frac{1}{4\pi} \nabla \int \frac{\vec{\nabla}' \cdot \vec{j}(\vec{r}', t)}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

(mit Kontinuität:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j} + \dot{\rho} = 0$$

$$\square \vec{A} = \mu_0 \vec{j}_T$$

(nach dem Helmholtz Prozess)