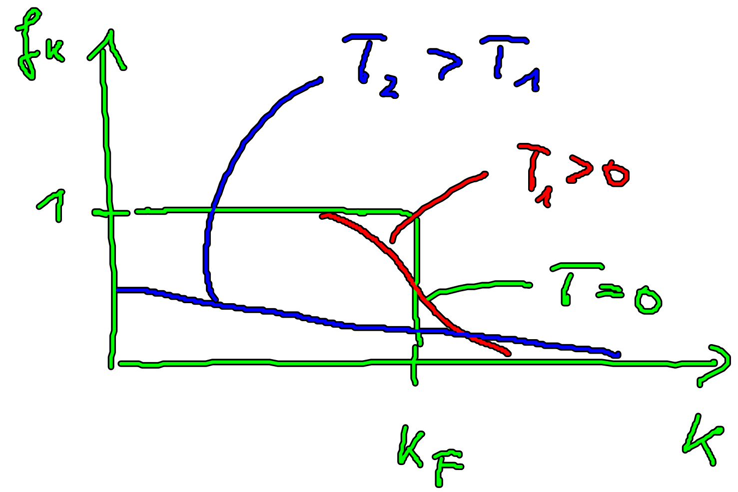
Diskussion der Dispersionsrelation $\omega = \omega(q)$ des Elektronengases

$$1 = V_Q \sum_{k,s} \frac{f^s_{k-Q} - f^s_k}{\hbar\omega + (\tilde{\varepsilon}_{k-Q\,s} - \tilde{\varepsilon}_{ks})} \qquad f^s_k = \langle a^+_{ks} a_{ks} \rangle$$

f_k : Fermifunktionen (siehe statistische Physik)



f_k: Wahrscheinlichkeit, einen 1-Teilchenzustand besetzt vorzufinden, wenn man nachsieht

4.3. Die kollektive Plasmaschwingung

betrachten langwellige Anregungen $Q \to 0 \sim \frac{2\pi}{\lambda} \to 0$

$\lambda \to \infty$

(i) $\omega(Q=0) = \omega_{pl}$

(ii) $\varepsilon_{k-Q} - \varepsilon_k = \frac{\hbar^2}{2m}(k^2 - 2\vec{k}\cdot\vec{Q} + \underbrace{Q^2}_{\to 0\ (Q \to 0)}) - \frac{\hbar^2}{2m}k^2$

$= -\frac{\vec{k}\cdot\vec{Q}\,\hbar^2}{}$

(iii) $f_{k-Q} - f_k = \underline{f_k} - \vec{Q}\cdot\vec{\nabla}_k f_k - \underline{f_k} = -\vec{Q}\cdot\vec{\nabla}_k f_k$

einsetzen in Dispersionsrelation:

$$1 = V_Q \sum_k \frac{-\vec{Q}\cdot\vec{\nabla}_k f_k}{\hbar\omega_{pl} - \frac{\hbar^2 \vec{Q}\cdot\vec{k}}{m}} = \frac{V_Q}{\hbar\omega_{pl}} \sum_k \sum_\alpha -Q^\alpha \cdot \overset{= \partial_{k_\alpha}}{\nabla_k^\alpha} f_k \left(1 + \frac{\vec{Q}\cdot\vec{k}\,\hbar^2}{m\,\omega_{pl}\,\hbar}\right)$$

(Spin mit reinnehmen) $\sum_k \hat{=} \sum_k \cdot 2$

Komponente des Skalarprodukts

$$\sum_{\alpha,k} Q^\alpha \nabla_k^\alpha f_k = 0, \text{ weil } \int_{\text{symm.}} \text{unsymmetrisch}$$

symmetrische Funktion in $|\vec{k}| = k$ (siehe oben)

$$1 = -\frac{V_Q}{m\,\omega_{pl}^2} \sum_{k,\alpha} Q^\alpha \nabla_k^\alpha f_k \; \vec{Q}\cdot\vec{k} \neq 0$$

$$= \left| \begin{array}{c} \text{partielle Integration} \\ \sum_k \to \int d^3k \end{array} \right|$$

$$1 = \frac{V_Q}{m\omega_{pl}^2} \sum_{k\alpha} Q^\alpha f_k Q^\alpha = \frac{e^2}{Q^2 V \varepsilon_0} N \frac{Q^2}{m\omega_{pl}^2}$$

$$\boxed{\longrightarrow \omega_{pl} = \left(\frac{e^2 n_0}{\varepsilon_0 m}\right)^{1/2} \qquad n_0 = \frac{N}{V}}$$

Für langwellige Anregungen $e^{i\vec{Q}\cdot\vec{r} - i\omega t}$ gilt

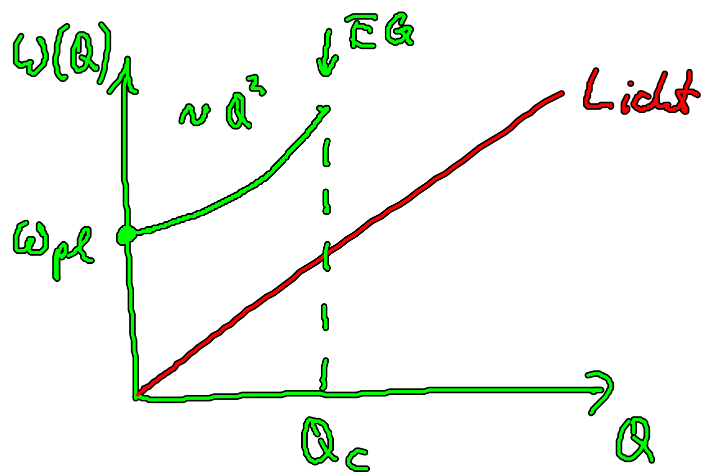
$\vec{Q}$: klein, ω: ω_{pl}

$\omega(Q=0) = \Omega_{pl}$, also die klassische Plasmafrequenz.

Die Plasmafrequenz beschreibt kollektive Oszillationen des Elektronengases (alle El. machen mit) mit einer Frequenz.

Für die Entwicklung für höhere Q ergibt sich:

$$\omega(Q) = \omega_{pl} + \alpha_0 Q^2 , \quad \alpha_0 - \text{Konstante}$$



Entwicklung geht bis zu Q_c,
danach andere Lösung.

4.4. Einteilchenanregungen des Elektronengases

in Dispersionsrelation $\exists$:

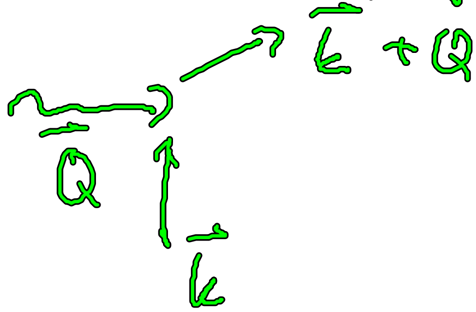
$$\underbrace{\sum_k \frac{f_{k-Q}-f_k}{\hbar\omega+\varepsilon_{k-Q}-\varepsilon_k}}_{\text{suche nach den dominanten Beiträgen:}} = \sum_k f_k\left(\frac{1}{\hbar\omega+\varepsilon_k-\varepsilon_{k+Q}} - \frac{1}{\hbar\omega+\varepsilon_{k+Q}-\varepsilon_k}\right)$$

$k \to k+Q \qquad \vec{Q} \to -\vec{Q}$

Nenner soll verschwinden!

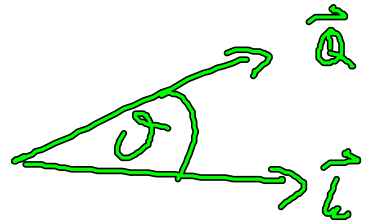
$$\hbar\omega(Q) = \pm\left(\varepsilon_{k+Q}-\varepsilon_k\right) =$$

Bedingg. für echte Anregungen des El-Gases:
die Energiestruktur sagt uns daß es um
1 Teilchenanregungen geht:



→ viele k mgl. → viele Frequenzen mgl.

$$\hbar\omega(Q) = \pm \frac{k\cdot Q\hbar^2}{m}\cos\vartheta + \frac{\hbar^2 Q^2}{2m}$$



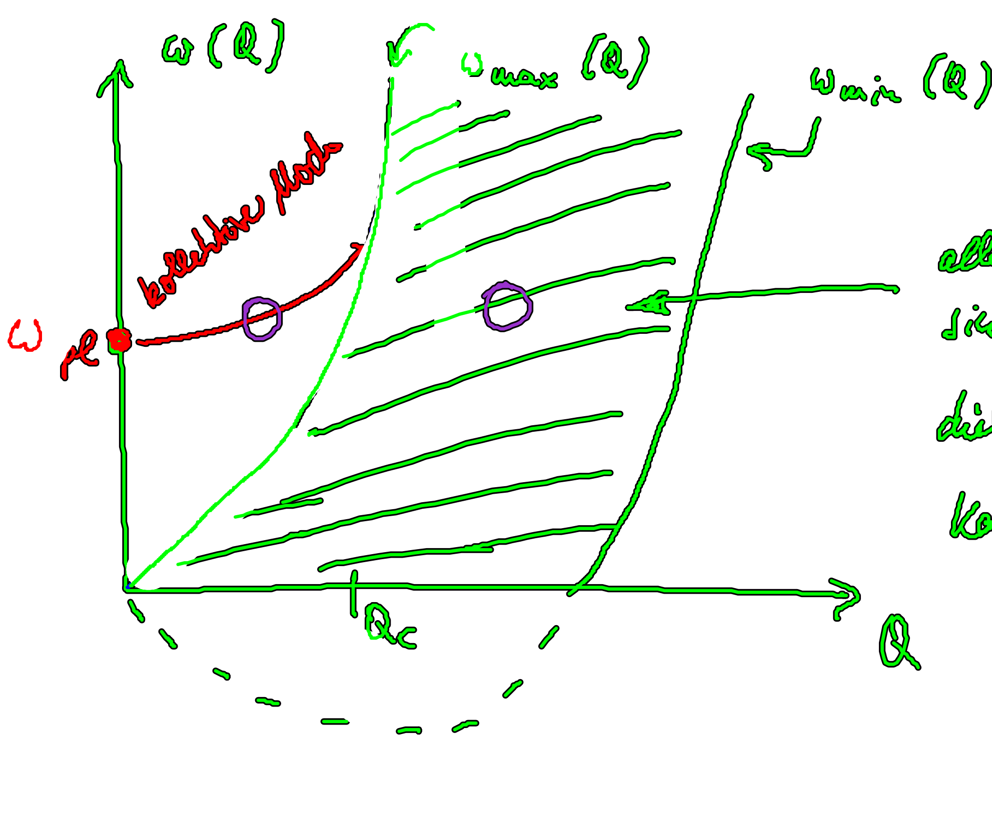
diese Formel enthält 2 Grenzfälle:

$\cos\vartheta = 1 \rightarrow \hbar\omega_{max}(Q) = \frac{\hbar^2 kQ}{m} + \frac{\hbar^2 Q^2}{2m}$

$\cos\vartheta = -1 \rightarrow \hbar\omega_{min}(Q) = -\frac{\hbar^2 kQ}{m} + \frac{\hbar^2 Q^2}{2m}$

größtmgl. $k = k_F$

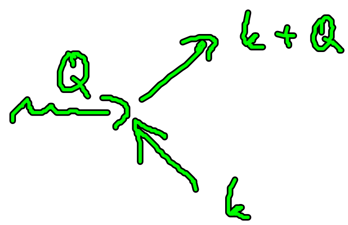
4.5 Gesamtdispersion der Plasmonen



alle mgl. Frequenze sind mgl., liegen so dicht, man spricht vom Kontinuum der Einteilchenanregungen

Plasmonen: sind Quasiteilchen des Elektronengases,
sind charakterisiert durch die Dispersionsrelation $\omega = \omega(Q)$

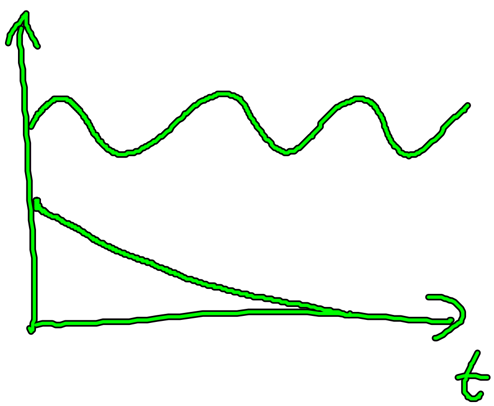
Es existieren sowohl Einteilchenanregungen:



$\Longrightarrow \omega(Q)$

Und es existiert eine kollektive Mode $\omega = \omega_{pl} + \alpha_0 Q^2$
(Plasmonen im „engeren" Sinn)

Wenn $Q \to Q_c$ von unten, so zerfällt die kollektive Mode in Einteilchenanregungen (Landaudämpfung)



ω_{pl} (kollektive Mode)

$\sum_{qk} e^{i\omega_{qk} t} \sim \frac{1}{t}$

(Einteilchenanregg.)

5. Dielektrische Eigenschaften des Elektronengases

5.1. Dielektrische Funktion

$\vec{D}_Q(\omega) = \varepsilon_0 \, \underline{\varepsilon_Q(\omega)} \, \vec{E}_Q(\omega)$ – allgemeinster Ansatz (linear) für Materialantwort im E-D-Raum

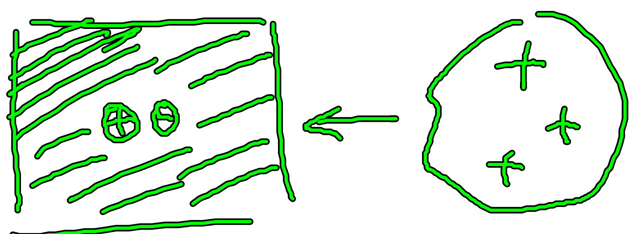
Kann man diese dielektrische Funktion bestimmen?

(wichtig: Absorption, Brechung ...)

mikroskopisches $\underline{H}$ $\xrightarrow{\quad}$ makroskopisches $\varepsilon_Q(\omega)$

?

Elektronengas



verzerrte Ladungen ← externe Ladung

$\rho_Q(\omega) \Leftarrow \rho_Q^{ext}(\omega)$

$\Downarrow$

$\varepsilon_Q(\omega)$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\left(\rho^{ext}(r,t) + \rho^{ind}(r,t)\right)$$

$$\underbrace{\vec{\nabla}\cdot\vec{D} = \rho^{ext}(r,t)}$$

$$i\vec{Q}\cdot\vec{E}_Q(\omega) = \frac{1}{\varepsilon_0}\left(\rho_Q^{ext}(\omega) + \rho_Q^{ind}(\omega)\right)$$

$$\underline{i\vec{Q}\cdot\vec{D}_Q(\omega) = \rho_Q^{ext}(\omega)}$$

$\varepsilon_Q(\omega)$ finden:

Antwortfunktion γ_Q

$$i\vec{Q}\cdot\vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\left(\rho_Q^{ext}(\omega) + \gamma_Q\,\rho_Q^{ext}(\omega)\right)$$

$$= \frac{i\vec{Q}\cdot\vec{D}_Q}{\varepsilon_0\,\varepsilon_Q} = \frac{1}{\varepsilon_0\,\varepsilon_Q}\,\rho_Q^{ext}(\omega)$$

$$\boxed{\Rightarrow \frac{1}{\varepsilon_Q} = 1 + \gamma_Q}$$

Wenn γ_Q bekannt, so kann ε_Q bestimmt werden

γ_Q aus $\rho^{ind} = \rho^{ind}(\rho^{ext})$

d.h. mache Heisenberggl. f. induzierte Ladung als Funktion der externen:

$\rho^{ind} \equiv \rho_Q(\omega)$, $\underline{H}_{elgas} \to \underline{H}_{elgas} + \underline{H}_{ext}$

dann $\rho_Q(t) \to$ Bewegungsgl. bestimmt

$H_{ext} = \phi_{ext}(r) \longrightarrow \underline{H}_{ext} = \sum_{\substack{k_1 k_2 \\ s_1 s_2}} \langle k_1 s_1 | \phi_{ext}(r) | k_2 s_2 \rangle \, a^+_{k_1 s_1} a_{k_2 s_2}$

potential der
extern Ladungsverteilg.

$$\Delta \phi_{ext} = -\frac{\rho_{ext}}{\varepsilon_0}$$

von außen vorgegeben

$$\underline{H}_{ext} = \sum_{k_1 k_2 s} \frac{1}{V} e^{-i(k_1 - k_2) r} \phi_{ext}(r) \quad , \; Q = k_1 - k_2$$

$$\frac{k_1 + k_2}{2} = k$$

$$= \sum_{k, Q, s} \phi_Q^{ext} \, a^+_{k-Q\, s} \, a_{k s}$$

$$\frac{1}{V} \int d^3 r \, e^{i \vec{Q} \vec{r}} \phi^{ext}(r) = \phi_Q^{ext}$$

$$\Delta \phi^{ext} = -\frac{\rho^{ext}}{\varepsilon_0} \xrightarrow[FT]{} -Q^2 \phi_Q^{ext} = -\frac{\rho_Q^{ext}}{\varepsilon_0}$$

$$\boxed{\phi_Q^{ext} = \frac{\rho_Q^{ext}}{Q^2 \varepsilon_0}}$$

Ziel: aus $\underline{H} = \underline{H}_{el\,gas} + \underline{H}_{ext}$

über $-i\hbar\,\partial_t\, a^+_{k-Qs} a_{ks} = [H, a^+_{k-Qs} a_{ks}]$

und $\rho_Q = \sum_k a^+_{k-Qs} a_{ks}$

$$\rho_Q = \gamma_Q\, \rho_Q^{ext}$$

aus $\rho_Q \to \gamma_Q \to \varepsilon_Q$

$$\langle a^+_{k-Qs} a_{ks} \rangle = \sigma^{ss}_{k-Q\,k}$$

nach Berechnen der HBGl. findet man:

$$-i\hbar\,\partial_t\, \sigma^{ss}_{k-Q\,k} = (\varepsilon_{k-Qs} - \varepsilon_{ks})\,\sigma^{ss}_{k-Q\,k}$$

$$+ V_Q\left(\sigma^{ss}_{kk} - \sigma^{ss}_{k-Q\,k-Q}\right)\left(\rho_Q + \underline{\underline{\rho_Q^{ext}}}\right)$$

durch externen Ladung erzeugt werden!

Fouriertrafo, umstellen:

$$\boxed{\sum_k \sigma^{ss}_{k-Q\,k} e^{-\rho_Q} = V_Q(\rho_Q + \rho_Q^{ext}) \cdot P_Q}$$

umstellen

$$P_Q = \sum_{ks} \frac{\sigma^{ss}_{kk} - \sigma^{ss}_{k-Q\,k-Q}}{-\hbar\omega - (\varepsilon_{k-Qs} - \varepsilon_{ks})}$$

$$\rho_Q = \frac{V_Q P_Q \rho_Q^{ext}}{1 - V_Q P_Q} = \chi_Q \rho_Q^{ext}$$

$$\frac{1}{\varepsilon_Q} = 1 + \chi_Q$$

$$\varepsilon_Q = \frac{1}{1+\chi_Q} = \frac{1}{1 + \frac{V_Q P_Q}{1 - V_Q P_Q}} = 1 - V_Q P_Q$$

$$\varepsilon_Q = 1 - V_Q \sum_{k,s} \frac{\sigma^{ss}_{k-Q\,k-Q} - \sigma^{ss}_{kk}}{\hbar\omega + (\varepsilon_{k-Qs} - \varepsilon_{ks})}$$

Dielektrische Funktion des

Elektronengase.