

# 8. BCS - Supraleitung

## 8.1. Experimentelle Tatsachen

1/ Unterhalb einer Sprungtemperatur  $T_c$  gehen bestimmte Stoffe in Zustand unendlicher Leitfähigkeit über

$$T_c = T_c(M), \text{ mit } M\text{-Ionenmasse (Isotopeneffekt)}$$

→ Wichtigkeit der Elektron-Phonon-Kopplung

2/ Bei Anlegen eines Magnetfelds ist die magnetische Induktion im SL Null (Meißner-Effekt)

→ führt auf  $\vec{j} \sim \vec{A}$  (nicht  $\vec{j} \sim \vec{E}$ )

⇒ Erklärung mit anziehender El-El Wechselwirkung

(Kapitel 7) um die Fermikante

2 Elektronen bilden gebundene Paare durch

Bindungsenergie durch Störungen aufgebrochen

werden muß, um Widerstand zu erzeugen

(oft nicht ungl. durch weitere Phonon modes oder

Störstellen)

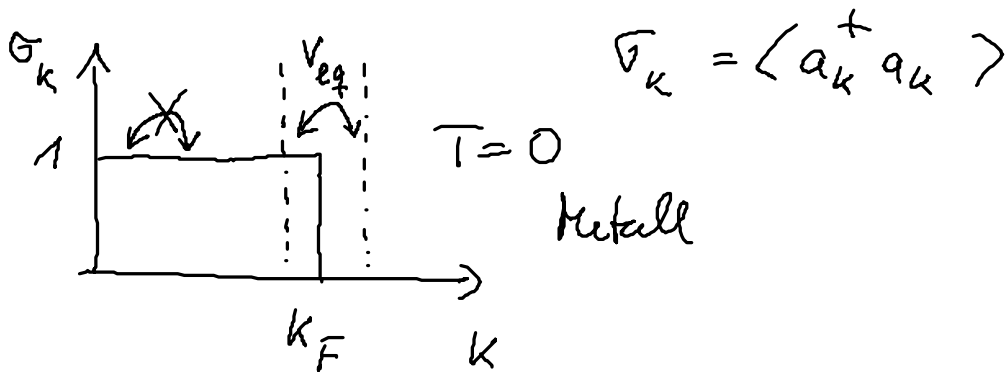
Überblick  $\hat{P}$  zur BCS

## 8.2. BCS - Modell

Modell Bardeen, Cooper, Schrieffer (1957)

anziehende El-El WW (Kapitel 7)

$V_{eq}$  - Matrixelement der effektiven El-El-WW

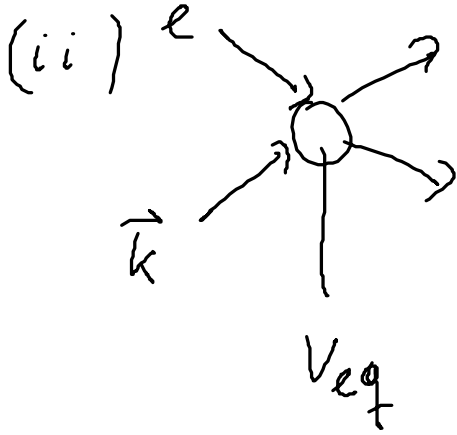


~~↙~~ weglassen wegen Pauli blocking

(i)  $V_{eq}$  induziert Streuprozesse in Umgebung der Fermienergie

$$V_{eq} \approx -V_0, \text{ sonst } 0$$
$$\left( \begin{array}{c} i \\ \vdots \\ \vdots \end{array} \right)$$

→



Elektronpaare WW nur wenn der Schwerpunktsimpuls verschwindet

$$\vec{k} + \vec{l} = 0$$

(iii) Elektronpaare die stoßen haben entgegengesetzt Spin

$$H = \sum_{\lambda, k} \epsilon_k a_{\lambda k}^\dagger a_{\lambda k} + \sum_{\substack{k, l, q \\ \lambda, \lambda'}} V_{eq} a_{\lambda, k+q}^\dagger a_{\lambda', l-q}^\dagger a_{\lambda' l} a_{\lambda k}$$

Freiteil in 1 Band

$\lambda$ : Spin index

WW der Elektronen durch

El-Pl WW (anziehend)

$$H = \sum_{\lambda k} \underbrace{(\epsilon_k - \mu)}_{\equiv \epsilon_k} a_{\lambda k}^\dagger a_{\lambda k} - V_0 \sum_{k, q} \underbrace{a_{\lambda, k+q}^\dagger a_{\lambda', -k-q}^\dagger a_{\lambda', -k} a_{\lambda k}}_{\substack{\text{(i)} \\ \downarrow \\ \text{(ii) } l = -k}} - V_0 \sum_{k, k'} \underbrace{a_{++k'}^\dagger a_{--k'}^\dagger a_{--k} a_{++k}}_{\substack{q+k=k' \\ \text{+ Spin: } \uparrow \\ \text{- Spin: } \downarrow}}$$

beschreibt die Umwandlg. von El-Paare mit

entgegen gesetzten Spin und Impuls nicht anders

## BCS-Hamiltonian

Harber-Fach versagt bei Beschreibg. der SL,  
es muß auf neuere Ansätze zurückgegriffen werden.

### 8.3. Energiespektrum des BCS-Modells

Bogendubov Transform. des  $H_{BCS}$

$$a^{\dagger}, a \Rightarrow b^{\dagger}, b$$

$$\text{Versuch: } H_{BCS} \rightarrow H(b^{\dagger}, b) \sim \sum_{\underline{k}} E_{\underline{k}} b_{\underline{k}}^{\dagger} b_{\underline{k}}$$

$E_{\underline{k}}$  muß Energieleiter beinhalten

$$a_{\underline{k}} = u_{\underline{k}} b_{\underline{k}} + v_{\underline{k}} b_{-\underline{k}}^{\dagger} \quad (\underline{k} \rightarrow +\underline{k})$$

$$a_{\underline{k}}^{\dagger} = u_{\underline{k}} b_{\underline{k}}^{\dagger} + v_{\underline{k}} b_{-\underline{k}}$$

$$a_{-\underline{k}} = u_{\underline{k}} b_{-\underline{k}} - v_{\underline{k}} b_{\underline{k}}^{\dagger}$$

$$a_{-\underline{k}}^{\dagger} = u_{\underline{k}} b_{-\underline{k}}^{\dagger} - v_{\underline{k}} b_{\underline{k}}$$

Liko mit Vorfaktoren  $u_k, v_k$  (zu bestimmen)

$b$ 's sollen geschickt gewählt werden:

(a) Forderung:  $b$ 's sind wieder Fermionen

$$[b_k, b_{-k'}^\dagger]_+ = \delta_{k, -k'} \quad \text{bestimmt } u_k, v_k$$

dem  $b$  ( $a^{(+)}$ ),  $b^\dagger$  ( $a^{(-)}$ ) eingesetzt wird

$$\text{und } [ ]_+ \text{ gefordert wird} \rightarrow u_k^2 + v_k^2 = 1$$

dh. eine erste Bestimmungs-gl. f.  $u_k, v_k$ .

(b) einsetzen in  $H_{BC}$ , ( $a^\dagger, a$ )

führt auf verschiedene Beiträge:

$$H = \underbrace{E_0}_{\text{Grundzustandsenergie}} + \underbrace{\sum_k E_k (b_k^\dagger b_k + b_{-k}^\dagger b_{-k})}_{\text{fermionische harmonische Oszillatoren}}$$

ab jetzt  
mitnehmen

$$+ \sum_k E_k^2 \left( b_k^\dagger b_{-k}^\dagger + b_k b_{-k} \right) + \bar{F} \left( b_k^\dagger b_{-k}^\dagger b_k b_{-k} \right)$$

Störend, wählen  $\boxed{E_k^2 = 0}$ ,  
 mgl., weil noch Freiheitsgrad  
 bei  $u_k, v_k$ -Bestimmung. offer ist

Streuung zwischen den  
 kleinen Quasiteilchen,  
 ist hoffentlich klein  
 b's müssen geschickt  
 gewählt sein

Grundzustandsenergie  $E_0$

$$E_0 = \sum_k 2 \varepsilon_k v_k^2 - V_0 \sum_{kk'} u_k v_k u_{k'} v_{k'}$$

Energie spektrum der angeregten Oszillatorzustände  $E_k^1$

$$E_k^1 = \varepsilon_k (u_k^2 - v_k^2) + 2V_0 u_k v_k \sum_{k'} u_{k'} v_{k'}$$

Wendelwertenergie  $E_k^2$

$$E_k^2 = 2 \varepsilon_k u_k v_k - V_0 (u_k^2 - v_k^2) \sum_{k'} u_{k'} v_{k'} = 0$$

ist ein weiteres Bestimmungsgleich. f.  $u, v$

$\Delta \equiv V_0 \sum_{k'} u_{k'} v_{k'}$  wird die Energielücke

Zwischen dem Supraleitenden Grundzustand  
und den angeregten Zuständen des Oszillators

mit 2 Gleichungen f.  $u_k, v_k$  kann man berechnen

$$\left. \begin{matrix} u_k \\ v_k \end{matrix} \right\} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \begin{matrix} 1 + \frac{\epsilon_k}{(\epsilon_k^2 + \Delta^2)^{1/2}} \\ (\epsilon_k^2 + \Delta^2)^{1/2} \end{matrix} \right)^{1/2}$$

$\Delta$  wird noch bestimmt

c) Grundzustandsenergie abs. senk. existiert

$$\Delta E = \bar{E}_0 - 2 \sum_k \epsilon_k < 0$$

SL-Grundzustand

normierter Zustand

Reduz. durch  
Einsätze der  
 $u_k, v_k$

guter Ansatz weil Energie minimierung

(d) Energie der angeregten Zustände

$$E_k^1(u_k, v_k) = E_k^1(\epsilon_k, \Delta) = \sqrt{\epsilon_k^2 + \Delta^2}$$

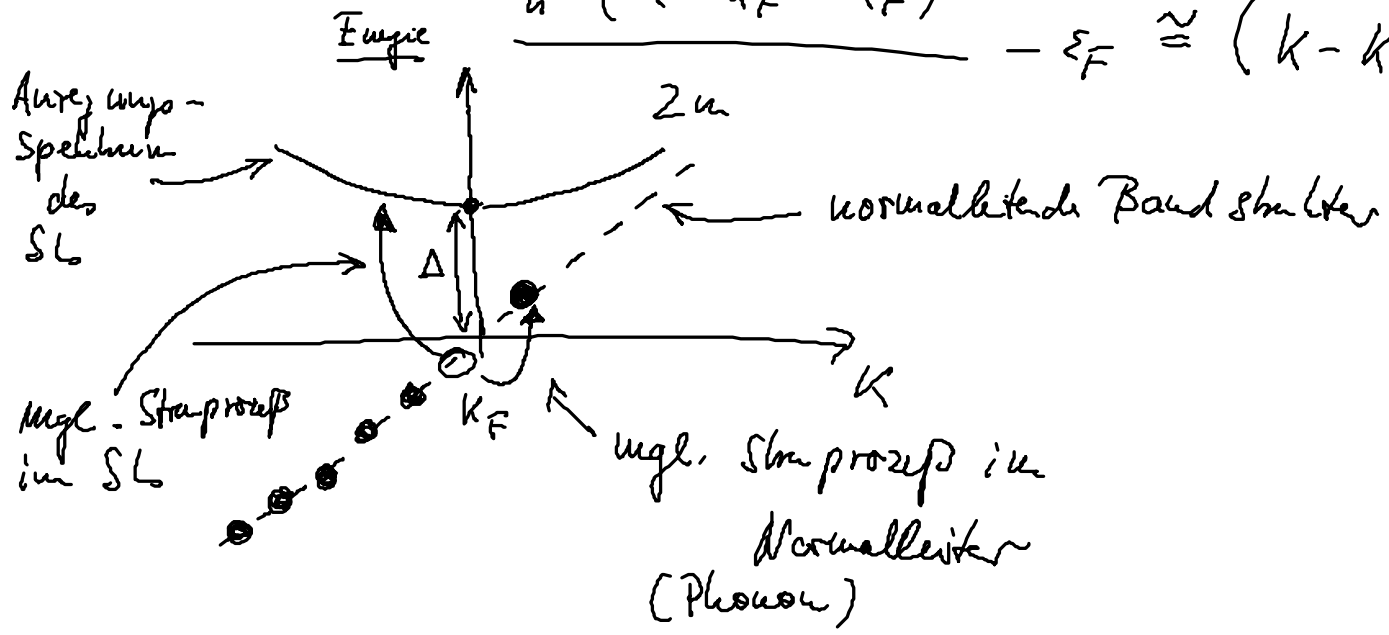
↑  
einsetzen

(e) Energie Schema:

Bandstruktur

Sind an Fermikante:  $\epsilon_k \rightarrow (\epsilon_k - \epsilon_F) = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} - \epsilon_F =$

$$\frac{\hbar^2 (k - k_F + k_F)^2}{2m} - \epsilon_F \approx (k - k_F)$$



Streuprozesse um Widerstand zu erzeugen erfordern  
 frei Zustände in die gestreut werden kann,  
 sind beim SL nur zu haben, wenn  
 der Streupartus mindestens Δ mitbringt  
 (Störstelle oder auch Phonon)

⇒ wodurch wirkungsvoll zierete Bandlücke Δ



# f/ Bestimmung von $\Delta$

$$\Delta \equiv V_0 \sum_k u_k v_k = V_0 \sum_k \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{\epsilon_k^2}{\epsilon_k^2 + \Delta^2} \right)^{1/2}$$

linke Seite von  
 $u_k, v_k$

Selbstkonsistenzgleichung für  $\Delta$ .

$$\Downarrow 1 = \frac{V_0}{2} \sum_k \frac{1}{(\epsilon_k^2 + \Delta^2)^{1/2}} \quad \int d^3k \rightarrow \int d\epsilon$$

$$1 = \frac{V_0}{2} \int_{-t_{\text{FD}}}^{+t_{\text{FD}}} d\epsilon z(\epsilon) \frac{1}{(\epsilon^2 + \Delta^2)^{1/2}}$$

↑  
Zustandsdichte

$t_{\text{FD}}$ : typische  
Phononenenergie  
um die Fermienergie

nach  $\Delta$  umstellen

$$z(\epsilon) \approx z(\epsilon_F) = z_0$$

$$1 = V_0 z_0 \operatorname{arcsinh} \left( \frac{t_{\text{FD}}}{\Delta} \right)$$

$$\Delta = \hbar \omega_D \frac{1}{\sinh \left( \frac{1}{v_0 z_0} \right)} \approx 2 \hbar \omega_D e^{-\frac{1}{v_0 z_0}}$$

$v_0$  sei schwach

Resultat ist in naive Störtheorie nicht erhältlich, weil  $\Delta$  nicht nach Potenzen von  $v_0$  geordnet werden kann.

$\Delta$  stellt sich als Bindungsenergie zerpaarter Elektronen heraus.

### (g) Charakter des Grundzustands

analog harmonischer Oszillator

$$b_{\pm k} |g\rangle = 0$$

Abbruchbedingung.

$|g\rangle$  muss so gewählt werden, d.ß

Grundzustandsenergie  $\langle g | H | g \rangle = E_0$

herauskommt:

Wahl:  $|g\rangle = \prod_k (u_k + v_k \underbrace{a_{+k}^+ a_{-k}^+}_{\text{erzeugt EL-Paare } a^+ a^+ \text{ oberhalb der Fermienergie}}) |\phi_0\rangle$

↑  
BCS

↓  
volle Fermienergie

wird nicht vorgeordnet, geht aber ohne Tricks

Bemerkungen:

Im SL-Zustand  $(|g\rangle, E_0)$  wird eine Überlagerung von Cooperpaaren  $(a_{+k}^+ a_{-k}^+)$  gebildet. Der GZ ist durch eine E-Lücke von den angeregten Zuständen getrennt (mindestens  $\Delta$ ). Damit ist dieser Zustand unempfindlich gegen Störungen bzw. Streuung an Störstellen oder anderen Phononen.

8.4 Supraleitung und London-Gleichung

Landa Theorie der SL:  $\vec{j} \sim \vec{A}$  (mitt  $\vec{E}$ )

$$\vec{j} = \frac{q}{2m} \psi^\dagger(\vec{r}, t) (\vec{p} - q\vec{A}) \psi(\vec{r}, t) + \text{h.a.}$$

$\vec{A}$  = selbstkonsistentes Vektorpotential ohne  
äußeres elektrische  $\vec{E}$ -Feld

hat 2 Teile  $\vec{p}$ ,  $\vec{A}$   
(u)

im Normalfall der Fall kompensieren sich beide Anteile:

$$\vec{j}_{\text{net}} = 0$$

im Superleitend Fall fällt der erste Anteil weg und

$$\vec{j}_{\text{se}} = -\frac{q^2}{2m} \psi^\dagger \vec{A} \psi \sim \vec{A}$$

$$\langle \quad \rangle = -\frac{e^2}{2m} \frac{1}{V} \sum_{q, \lambda} e^{-i\vec{Q}\cdot\vec{r}} \vec{A}(\vec{r}) \left\langle a_{q+\frac{Q}{2}}^\dagger a_{q-\frac{Q}{2}} \right\rangle$$

h.a.

$Q=0$  im homogenes System:

$$\vec{j}_{\text{se}} = -\frac{e^2}{m} \vec{A}(\vec{r}) n_{\text{el}}$$

↑

ergibt die Materialgleichungen der SL-Theorie:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{j}_{se} &= -\frac{e^2}{m} \mu_{el} \vec{B} \\ \partial_t \vec{j}_{se} &= \frac{e^2}{m} \mu_0 \vec{E} \end{aligned}$$

Einsetzen in Maxwellgleichungen ergibt  
Meißner-Effekt:

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}_{se} \quad (\text{Maxwell})$$

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \operatorname{rot} \vec{j}_{se} = -\frac{e^2 \mu_{el} \mu_0}{m} \vec{B}$$

$$-\Delta \vec{B} = -\frac{e^2 \mu_{el} \mu_0}{m} \vec{B}$$

$$\partial_z^2 B_x = \lambda_L^2 B_x$$

$$\rightarrow B_x = B_x(0) e^{-z/\lambda_L}$$

