8. BCS - Supraleitung

8.1. Experimentelle Tatsachen

1) Unterhalb einer Sprungtemperatur T_c gehen bestimmte Stoffe in Zustand unendlicher Leitfähigkeit über

$T_c = T_c(M)$, mit M-Ionenmasse (Isotopeneffekt)

$\rightarrow$ Wichtigkeit der Elektron-Phonon-Kopplung

2) Bei Anlegen eines Magnetfelds ist die magnetische Induktion im SL Null (Meißner-Effekt)

$\rightarrow$ führt auf $\vec{j} \sim \vec{A}$ (nicht $\vec{j} \sim \vec{E}$)

$\Rightarrow$ Erklärung mit anziehender El-El Wechselwirkung (Kapitel 7) um die Fermikante

2 Elektronen bilden gebundene Paare deren Bindungsenergie durch Störungen aufgebrochen werden muß, um Widerstand zu erzeugen

(oft nicht mgl. durch weitere Phononmoden oder

Störstellen)

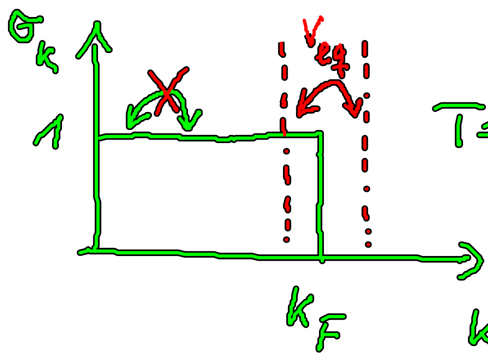
Überblick ? zur BCS

8.2. BCS - Modell

Modell Bardeen, Cooper, Schrieffer (1957)

anziehende El - El WW (Kapitel 7)

V_{eq} - Matrixelement der effektiven El - El - WW



$\sigma_k = \langle a_k^+ a_k \rangle$

T = 0

Metall

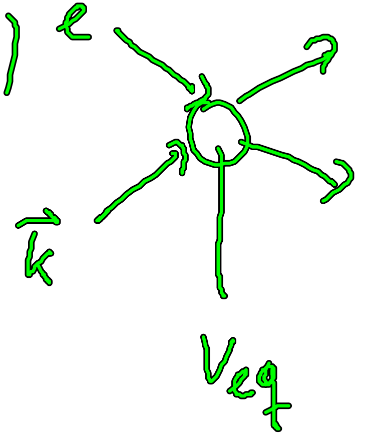
weglassen wegen Pauli blocking

(i) V_{eq} induziert Streuprozesse in Umgebung der Fermikante

$V_{eq} \approx -V_0$, sonst 0

(in ⋮ ⋮)

→

(ii) 

Elektronenpaare ww nur wenn der Schwerpunktsimpuls verschwindet

$$\vec{k}+\vec{l}=0$$

(iii) Elektronenpaare die stoßen haben entgegengesetzt Spin

$$H=\sum_{\lambda,k}\varepsilon_k\, a^+_{\lambda k}a_{\lambda k}+\sum_{\substack{klq\\ \lambda\lambda'}}V_q\, a^+_{\lambda\, k+q}\,a^+_{\lambda'\, l-q}\,a_{\lambda' l}\,a_{\lambda k}$$

Teilchen in 1 Band

λ : Spin index

WW der Elektronen durch El-Ph WW (anziehend)

$\varepsilon_F=\mu$

ε_F

(i)

(ii) $l=-k$

$$H=\sum_{\lambda k}\underbrace{(\varepsilon_k-\mu)}_{\equiv E_k}a^+_{\lambda k}a_{\lambda k}\;\underbrace{-V_0\sum_{k,q}a^+_{\lambda\, k+q}\,a^+_{\lambda'\, -k-q}\,a_{\lambda' -k}\,a_{\lambda k}}_{-V_0\sum_{kk'}a^+_{+k'}\,a^+_{-\,-k'}\,a_{-\,-k}\,a_{+k}}$$

$\pm$ Spin: $\uparrow$ $\downarrow$

$q+k=k'$

beschreibt die Umwandlg. von El-Paare mit entgegengesetzten Spin und Impuls ineinander

BCS-Hamiltonian

Hartree-Fock versagt bei Beschreibg. der SL,
es muß auf neuartige Ansätze zurückgegriffen werden

8.3. Energiespektrum des BCS-Modells

Bogoljubow Trafo des H_{BCS}

$$a^+, a \Longrightarrow b^+, b$$

Versuch: $H_{BCS} \longrightarrow H(b^+, b) \sim \sum_k \underline{\underline{E_k}}\, b_k^+ b_k$

E_k muß Energielücke beinhalten

$$a_k = u_k b_k + v_k b_{-k}^+ \qquad (k \to +k)$$

$$a_k^+ = u_k b_k^+ + v_k b_{-k}$$

$$a_{-k} = u_k b_{-k} - v_k b_k^+$$

$$a_{-k}^+ = u_k b_{-k}^+ - v_k b_k$$

Liko mit Vorfaktoren u_k, v_k (zu bestimmen)

b's sollen geschickt gewählt werden:

(a) Forderg. b's sind wieder Fermionen

$$[b_{k'}, b^+_{-k'}]_+ = \delta_{k,-k'} \quad \text{bestimmt } u_k, v_k$$

wenn $b(a^{(+)})$, $b^+(a^{(+)})$ eingesetzt wird

und $[\;]_+$ gefordert wird $\Rightarrow$ $u_k^2 + v_k^2 = 1$

d.h. eine erste Bestimmungsgl. f. u_k, v_k.

(b) einsetzen in H_{BCS} (a^+, a)

führt auf verschiedene Beiträge:

$$\left.H = \underbrace{E_0}_{\substack{\text{Grundzu-}\\\text{stands}\\\text{energie}}} + \underbrace{\sum_k E_k^1 (b_k^+ b_k + b_{-k}^+ b_{-k})}_{\text{fermionischer harmonischer Oszillator}}\right\}$$

also jetzt mitnehmen

$$+\underbrace{\sum_k E_k^2 \left(b_k^+ b_{-k}^+ + b_k b_{-k} \right)}_{\text{störend, wählen } \boxed{E_k^2 = 0,} \text{ mögl., weil noch Freiheitsgrad bei } u_k, v_k\text{-Bestimmung offen ist}} + \underbrace{F\left(b^+ b^+ b b\right)}_{\text{Streuung zwischen den neuen Quasiteilchen, ist hoffentlich klein}}$$

b's müssen geschickt gewählt sein

Grundzustandsenergie E_0

$$E_0 = \sum_k 2 \varepsilon_k v_k^2 - V_0 \sum_{kk'} u_k v_k u_{k'} v_{k'}$$

Energiespektrum der angeregten Oszillatorzustände E_k^1

$$E_k^1 = \varepsilon_k \left(u_k^2 - v_k^2 \right) + 2 V_0 u_k v_k \sum_{k'} u_{k'} v_{k'}$$

Wechselwirkungsenergie E_k^2

$$E_k^2 = 2 \varepsilon_k u_k v_k - V_0 \left(u_k^2 - v_k^2 \right) \sum_{k'} u_{k'} v_{k'} = 0$$

ist eine weitere Bestimmungsgleichg. f. u, v

$$\Delta \equiv V_0 \sum_{k'} u_{k'} v_{k'} \quad \text{wird die Energielücke}$$

Zwischen dem supraleitenden Grundzustand
und den angeregten Zuständen der Oszillatoren

mit 2 Gleichungen f. u_k, v_k kann man berechnen

$$\boxed{\left.\begin{matrix} u_k \\ v_k \end{matrix}\right\} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1 \pm \frac{\varepsilon_k}{\left(\varepsilon_k^2 + \Delta^2\right)^{1/2}}\right)^{1/2}}$$

Δ wird noch bestimmt

c) Grundzustandsenergie absenkg. existiert

$$\Delta E = E_0 - \underbrace{2}_{\text{Spin}} \sum_k \varepsilon_k < 0$$

SL-Grundzustand

normalleitender Zustand

Rechng. durch Einsetzen der $u_k\, v_k$

guter Ansatz weil Energieminimierung

(d) Energie der angeregten Zustände

$$E_k^1(u_k, v_k) = E_k^1(\varepsilon_k, \Delta) = \sqrt{\varepsilon_k^2 + \Delta^2}$$

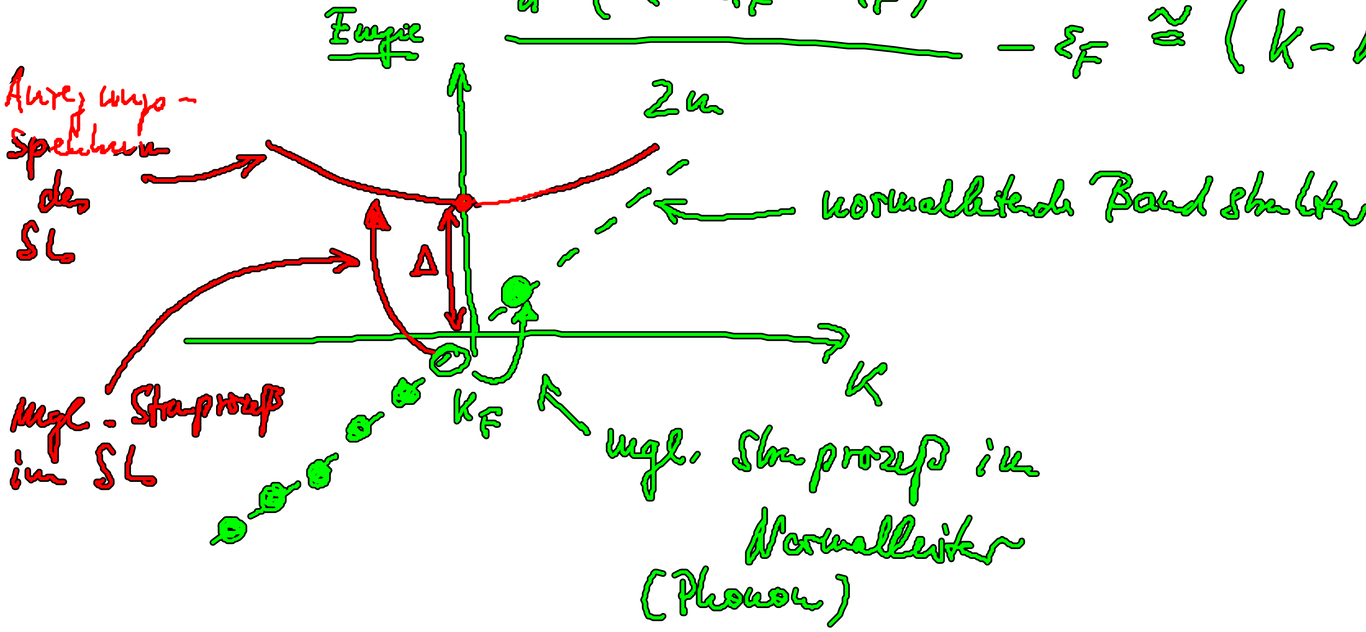
einsetzen

(e) Energieschema:

Bandstruktur

Sind an Fermikante: $\varepsilon_k \to (\varepsilon_k - \varepsilon_F) = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} - \varepsilon_F =$

$$\frac{\hbar^2 (k - k_F + k_F)^2}{2m} - \varepsilon_F \simeq (k - k_F)$$



Streuprozesse um Widerstand zu erzeugen erfordern freie Zustände in die gestreut werden kann, sind beim SL nur zu haben, wenn der Streupartner mindestens Δ mitbringt (Störstelle oder auch Phonon)

$\Rightarrow$ Wechselwirkungsinduzierte Bandlücke Δ

f) Bestimmung von Δ

$$\Delta \equiv V_0 \sum_k u_k v_k = V_0 \sum_k \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\varepsilon_k^2}{\varepsilon_k^2+\Delta^2}\right)^{1/2}$$

Einsetzen von

u_k, v_k

Selbstkonsistenzgleichung f. ür Δ.

$$1 = \frac{V_0}{2} \sum_k \frac{1}{(\varepsilon_k^2+\Delta^2)^{1/2}} \qquad \int d^3k \rightarrow \int d\varepsilon$$

$$1 = \frac{V_0}{2} \int_{-\hbar\omega_D}^{+\hbar\omega_D} d\varepsilon\, Z(\varepsilon) \frac{1}{(\varepsilon^2+\Delta^2)^{1/2}}$$

Zustandsdichte

$\hbar\omega_D$: typische Phononenergie um die Fermikante

nach Δ umstellen

$$Z(\varepsilon) \approx Z(\varepsilon_F) = Z_0$$

$$1 = V_0 Z_0 \operatorname{arcsinh}\left(\frac{\hbar\omega_D}{\Delta}\right)$$

$$\Delta = \hbar\omega_D \frac{1}{\sinh\left(\frac{1}{V_0 z_0}\right)} \approx 2\hbar\omega_D \, e^{-\frac{1}{V_0 z_0}}$$

V_0 sei schwach

Resultat ist in naiver Störungstheorie nicht erhältlich, weil Δ nicht nach Potenzen von V_0 geordnet werden kann.

Δ stellt sich als Bindungsenergie der gepaarten Elektronen heraus.

(g) Charakter des Grundzustands

analog harmonischer Oszillator

$$b_{\pm k} |g\rangle = 0$$

Abbruchbedingg.

$|g\rangle$ muß so gewählt werden, daß

Grundzustandsenergie $\langle g|H|g\rangle = E_0$

herauskommt:

volle Fermikugel

Wahl: $|g\rangle = \prod_k \left(u_k + v_k \underline{\underline{a^+_{+k} a^+_{-k}}}\right)|\phi_0\rangle$

BCS

erzeugt El-Paare $a^+ a^+$ oberhalb der Fermienergie

wird nicht vorgerechnet, geht aber ohne Tricks

<u>Bemerkungen</u>:

Im SL-Zustand ($|g\rangle$, E_0) wird eine Überlagerung von Cooperpaaren ($a^+_{+k} a^+_{-k}$) gebildet. Der GZ ist durch eine E-Lücke von den angeregten Zuständen getrennt (mindestens Δ). Damit ist dieser Zustand nur schwach empfindlich gegen Störungen bzw. Streuung an Störstellen oder anderen Phononen.

8.4 Suprastrom und Londongleichung

London Theorie der SL: $\vec{j} \sim \vec{A}$ (nicht $\vec{E}$)

$$\vec{j} = \frac{q}{2m} \Psi^+(r,t) \left(\vec{p} - q\vec{A} \right) \Psi(r,t) + \underline{h.a.}$$

$\vec{A}$ = selbstkonsistentes Vektorpotential ohne äußeres elektrisches E-Feld

hat 2 Teile $\vec{p}$, $\vec{A}$
(nl)

im normalleitenden Fall kompensieren sich beide Anteile:

$$\vec{j}_{nl} = 0$$

im supraleitenden Fall fällt der erste Anteil weg und

$$\vec{j}_{sl} = -\frac{q^2}{2m} \Psi^+ \vec{A} \Psi \sim \vec{A}$$

$$\langle \quad \rangle = -\frac{e^2}{2m} \frac{1}{V} \sum_{q,Q,\lambda} e^{-i\vec{Q}\cdot\vec{r}} \vec{A}(\vec{r}) \langle a^+_{q+\frac{Q}{2}\lambda} a_{q-\frac{Q}{2}\lambda} \rangle + h.a.$$

$Q=0$ im homogenen System:

$$\vec{j}_{sl} = -\frac{e^2}{m} \vec{A}(\vec{r})\, n_{el}$$

SL-Dicke

ergeben die Materialgleichungen der SL-Theorie:

$$\boxed{\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{j}_{sl} &= -\frac{e^2}{m} n_{sl} \vec{B} \\ \partial_t \vec{j}_{sl} &= \frac{e^2}{m} n_0 \vec{E} \end{aligned}}$$

einsetzen in Maxwellgleichungen ergibt Meißner-Effekt:

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}_{sl} \quad (\text{Maxwell})$$

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \operatorname{rot} \vec{j}_{sl} = -\frac{e^2 n_{sl} \mu_0}{m} \vec{B}$$

$$-\Delta \vec{B} = -\frac{e^2 n_{sl} \mu_0}{m} \vec{B}$$

$$\partial_z^2 B_x = \lambda_L^2 B_x$$

$$\rightarrow \quad B_x = B_x(0)\, e^{-z/\lambda_L}$$