Theoretische Physik III: Elektrodynamik/Optik

- Elektrodynamik im Vakuum

  Maxwell-Glen, Randbedingungen

  Anwendungen: Antennenabstrahlung, Wellenoptik und Beugung

- Elektrodynamik in Materie

  Anwendungen: opt. Dispersion, Brechung, Reflexion

- Relativist. Formulierung

Klass. Mechanik

- deterministisch
- nichtrelativistisch
- nichtlinear

Quantenmechanik

- probabilistisch
- nichtrelativist.
- linear

Elektrodynamik

- Feldtheorie
- relativistisch invariant
- linear (Superpos. prinzip → Interferenz)
- lokal (nur im Vakuum)

4 fundamentale WW:

Stärke nimmt zu

Gravitations-WW (Masse)
elektromagn. WW (Ladung)
schwache WW (β-Zerfall)
starke WW (Kernkräfte)

Reichweite nimmt zu

Maxwell 1873
H. Hertz 1888 el. magn. Wellen

1. Elektrostatik

c $\in$

—

Coulomb-WW

Coulomb

$$\boxed{\begin{aligned}\underline{F} &= q_2\,\underline{E}(\underline{r}) \\ \underline{E}(\underline{r}) &= \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{\underline{r}}{r^3}\end{aligned}}$$

Kraft auf Pkt.lad. q_2 bei $\underline{r}$

el. Feld einer Pkt. lad. q_1 bei $\underline{r}=0$

Einheitensystem : MKSA = SI
m kg s A

Ladungseinheit 1 C = 1 As

Dielektr. konst. ϵ_0 (gauß = cgs $\Rightarrow \frac{1}{4\pi\epsilon_0}=1$)

1.2 Elektrisches Feld und Potenzial

- Feld als Medium für die Übertragung phys. WW (Nahewirkung)
- Feld $\underline{E}(\underline{r})$ ist Zustand des leeren Raumes bei $\underline{r}$
- Eigenständige Felddynamik (Maxwell-Glн.) zur Beschreibung endlich schneller Ausbreitung (Retardierungseffekt)

  Feld kann Energie, Impuls, Drehimpuls aufnehmen und abgeben

Verallgemeinerung des Punktladungsmodells

Superpositionsprinzip für Kräfte (4. Newton'sches Axiom)

$$\underline{E}(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{j=1}^{n} q_j \frac{\underline{r}-\underline{r}_j}{|\underline{r}-\underline{r}_j|^3}$$

Kontin. Ladungsverteilung $dq = \rho(\underline{r}')\,d^3r'$
(Ladungsdichte $\rho(\underline{r}')$)

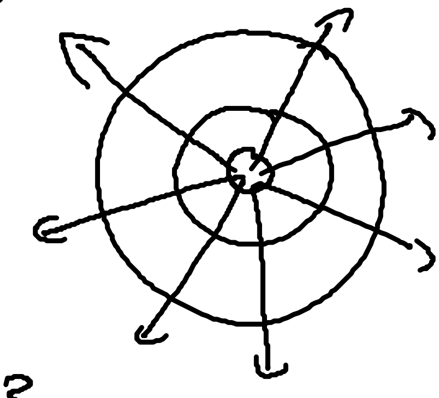
$$\Rightarrow \quad \underline{E}(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r' \rho(\underline{r}') \frac{\underline{r}-\underline{r}'}{|\underline{r}-\underline{r}'|^3}$$

El. stat. Pot.:

$$\phi(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r' \frac{\rho(\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|}$$

$$\underline{E}(\underline{r}) = -\underline{\nabla}\phi(\underline{r}) \qquad [\phi] = \frac{Nm}{C} = V$$

Grundgleichungen der Elektrostatik



$$\boxed{\begin{array}{c} \mathrm{rot}\,\underline{E} = 0 \\ \Updownarrow \\ \underline{E} = -\underline{\nabla}\phi \\ \Updownarrow \\ \oint_{\partial F} \underline{E}\cdot d\underline{s} = 0 \end{array}}$$

wirbelfreies Feld

es ex. ein Potenzial

$$W = q\int_1^2 \underline{E}\cdot d\underline{s}$$ wegunabh.

$$\boxed{\begin{array}{c} \epsilon_0\,\mathrm{div}\,\underline{E} = \rho \\ \Updownarrow \\ \epsilon_0 \oint_{\partial V} \underline{E}\cdot d\underline{f} = \int_V \rho(\underline{r}')\,d^3r' \end{array}}$$

diff. Form
Integralform } des Gauß'schen Gesetzes

*Gauß'scher Integralsatz $\int_V d^3r\, \mathrm{div}\,\underline{E}(\underline{r}) = \oint_{\partial V} d\underline{f}\cdot\underline{E}(\underline{r})$

$$\underline{E} = -\underline{\nabla}\phi \Downarrow \quad \epsilon_0\,\underline{\nabla}\cdot\underline{E} = \rho$$

$$\boxed{\Delta\phi = -\frac{1}{\epsilon_0}\rho(\underline{r})}$$ Poisson-Gl.

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\phi(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{\mathbb{R}^3} d^3r'\,\frac{\rho(\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|}}$$ Coulomb-Gesetz

Lösung der Poisson-Gl. zu den Randbed. $\phi(\underline{r}) \to 0$ für $|\underline{r}| \to \infty$

1.3 Poisson-Gleichung und Green'sche Funktion

Allg. Lösung der Poisson-Gl. $\Delta\phi(\underline{r}) = -\frac{1}{\epsilon_0}\rho(\underline{r})$:

Part. Dgl. für $\phi(\underline{r})$ zu vorgeg. Ladungsverteil. $\rho(\underline{r})$

(wird erst eindeutig durch Randbed.)

Green'sche Fkt.

Allg. Methode zur Lösung inhomogener Dgln. für vorgegebene Inhomogenität.

z. B. Mechanik : gedämpfter getriebener harmon. Osz.

E-Dynamik : Poisson-Gl.

inhomog. Wellengl.

QM : Streutheorie

Abstraktes Lösungsschema

$$\boxed{\Delta\phi = -\frac{1}{\epsilon_0}\rho} \xrightarrow[\text{Invert. des Diff.op.}]{\text{Lösung durch}} \boxed{\phi = \tilde{G}\rho}$$

Green'scher Op. $\tilde{G}$

Fourier $\Downarrow$ Trafo

$$\phi(\underline{r}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int d^3k\, \hat{\phi}(\underline{k})\, e^{i\underline{k}\cdot\underline{r}}$$

$\Downarrow$

$$\boxed{-k^2\hat{\phi} = -\frac{1}{\epsilon_0}\hat{\rho}(\underline{k})} \xrightarrow[\text{des Mult.op.}]{\text{Invertierung}} \boxed{\hat{\phi} = \hat{G}\hat{\rho}} \quad \hat{G} := \frac{1}{\epsilon_0 k^2}$$

Fourier $\Uparrow$ Rücktrafo

$$\boxed{\phi(\underline{r}) = \int d^3r'\, G(\underline{r}-\underline{r}')\,\rho(\underline{r}')}$$

Faltungsprod.

Explizite Durchführung

(i) Lösung für Punktladung bei $\underline{r}''$: $\rho(\underline{r}') = \delta(\underline{r}' - \underline{r}'')$

$$\Rightarrow \phi(\underline{r}) = \int d^3r' \, \underline{G(\underline{r}-\underline{r}')} \, \delta(\underline{r}' - \underset{\uparrow}{\underline{r}''}) = G(\underline{r} - \underline{r}'')$$

d.h. Green'sche Fkt. $G(\underline{r}-\underline{r}'')$ ist Lösung der Poisson-Gl.

$$\boxed{\Delta_r G(\underline{r} - \underline{r}'') = -\frac{1}{\epsilon_0} \delta(\underline{r} - \underline{r}'')}$$

für δ-förmige Inhomogenität.

(ii) Dann Lösung für bel. Inhomogenität $\rho(\underline{r})$ durch Faltung mit der Green'schen Fkt.:

$$\phi(\underline{r}) = \int d^3r' \, G(\underline{r} - \underline{r}') \, \rho(\underline{r}')$$

- Green'sche Fkt. wird erst durch die Randbed. bestimmt

<u>Spezielle Randbed.</u> $\phi(\underline{r}) \to 0$ für $|\underline{r}| \to \infty$

(Lösung im unendl. Raum)

$$G(\underline{r} - \underline{r}') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\underline{r} - \underline{r}'|} \Rightarrow \phi(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathbb{R}^3} d^3r' \frac{\rho(\underline{r}')}{|\underline{r} - \underline{r}'|}$$

Coulomb-Pot. ist Lösung der Poissongl. im ganzen $\mathbb{R}^3$ für Pkt. ladung $q = 1$ bei $\underline{r}'$.