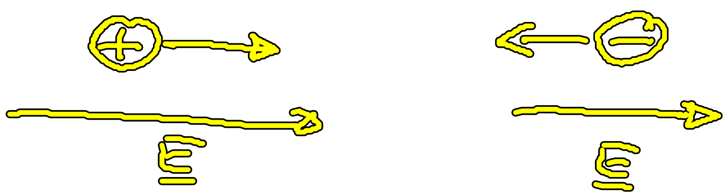
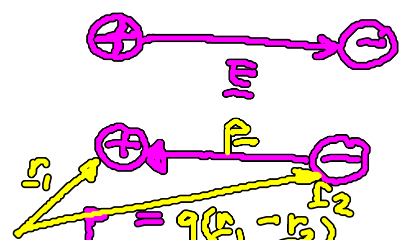
1.6 Leiter in der Elektrostatik

Elektrische Leiter = Materie mit quasi-frei beweg. el. Ladungen.

El. Feld $\underline{E}(\underline{r}) \longrightarrow$ Kraft $\underline{F} = q\underline{E}$



Randbemerkung

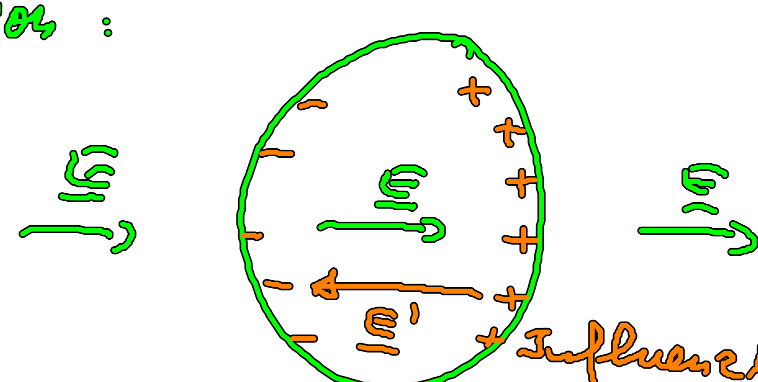


$$\underline{p} = q\underbrace{(\underline{r}_1 - \underline{r}_2)}_{\underline{a}}$$

Anfang:

End:

Endsituation:



Influenzladung

$\Downarrow$

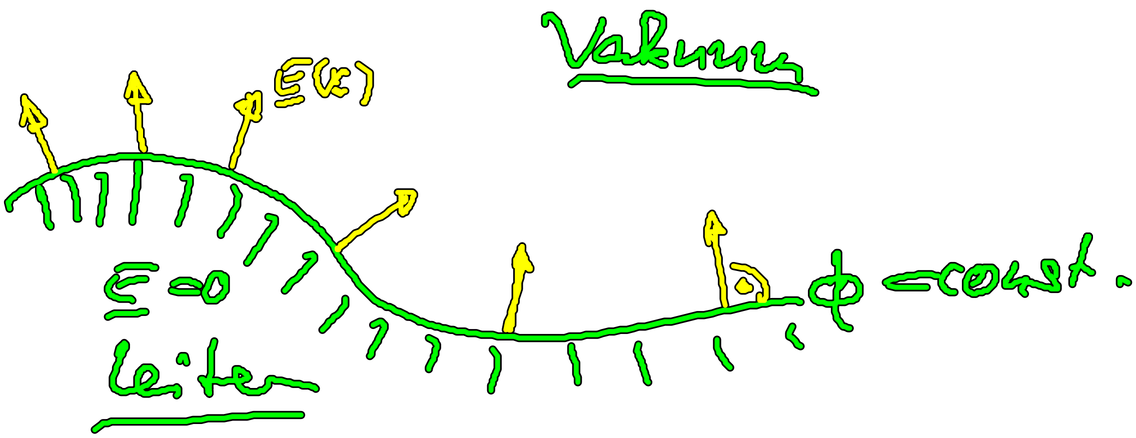
$\underline{E}^{res}(\underline{r}) = 0$ im Innern des Leiters

$$\underline{E}^{res}(\underline{r}) = -\underline{\nabla}\Phi(\underline{r}) = 0 \Rightarrow \Phi(\underline{r}) = \text{const.}$$

Leiteroberfläche ist Äquipotenzialfläche im Innern des Leiters

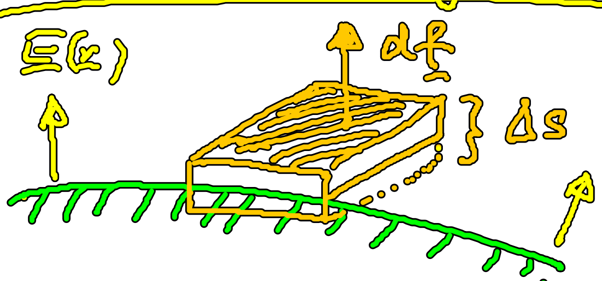
$\underline{E}(\underline{r}) \perp \Phi(\underline{r}) = \text{const}$

$\Rightarrow \underline{E}(\underline{r}) \perp$ Leiteroberflächen



$\epsilon_0 \underline{\nabla} \cdot \underline{E} = \rho(\underline{r})$

Flächenladungsdichte auf Leiteroberflächen:



$$\epsilon_0 \oint_{\partial V} d\underline{f} \cdot \underline{E}(\underline{r}) = \int_V \rho(\underline{r})\, d^3r$$

$V = df \cdot \Delta s$ mit $df \to 0$, $\Delta s \to 0$

$$\oint_{\partial V} d\underline{f}\, \underline{E}(\underline{r}) \longrightarrow df\, \underbrace{\underline{n}\,\underline{E}}_{E} \qquad \underline{n} \parallel \underline{E}$$

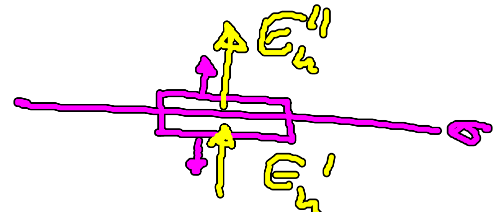
$$\int_V d^3r\, \rho(\underline{r}) \longrightarrow df\, \underbrace{\rho(\underline{r})\Delta s}_{\sigma(\underline{r})}$$

$\sigma(\underline{r})$ Flächen-ladungsdichte

$$\boxed{\underline{E}(\underline{r}) = \frac{1}{\epsilon_0}\sigma(\underline{r})\,\underline{n}}$$ auf Leiteroberfläche

allg.:

$$\underbrace{E_n'' - E_n}_{\text{„Flächendivergenz"}} = \frac{1}{\epsilon_0}\sigma(\underline{r})$$

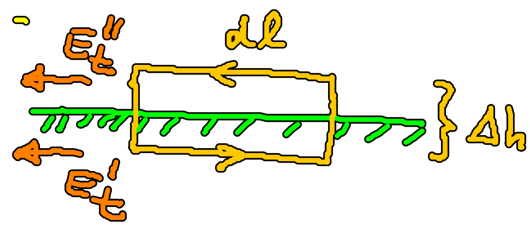


„Flächendivergenz" = Sprung der Normalkomp. von $\underline{E}$ beim Durchgang durch geladene Fläche

analog zur „Volumendivergenz"

$$\underline{\nabla}\cdot\underline{E} = \frac{1}{\epsilon_0}\rho(\underline{r})$$

Tangenzialkomponente von $\underline{E}$ ist stetig beim Durchgang durch geladenen Fläche.



Beweis:

$$\oint_{\partial F} \underline{E}\cdot d\underline{s} \overset{\text{Stokes}}{=} \int_F \underline{\nabla}\times\underline{E}\, d\underline{f} = 0$$

$F = dl\cdot\Delta h$ mit $dl \to 0$, $\Delta h \to 0$

$$(E_t'' - E_t')\,dl = 0$$

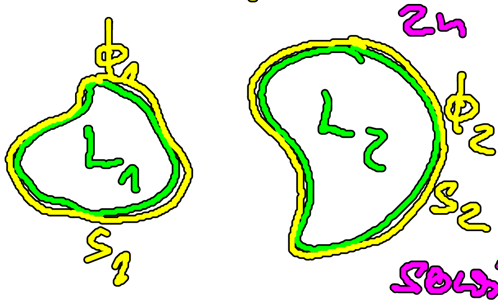
$$\Longrightarrow \boxed{\begin{aligned} E_t'' - E_t' &= 0 \\ E_n'' - E_n' &= \frac{1}{\epsilon_0}\sigma(\underline{r}) \end{aligned}}$$

Randwertaufgaben der Elektrostatik mit Leitern

1. Grundaufgabe

geg.: Leiter L_α (Oberflächen S_α), $\alpha = 1, \dots, n$
mit Potenzialen Φ_α;
Raumladungsdichte $\varrho(\underline{r})$ im Außenraum V

gesucht: $\Phi(\underline{r})$ als Lösung von $\Delta\Phi = -\frac{1}{\epsilon_0}\varrho(\underline{r})$ $\underset{V}{}$
zu den Randbed. $\Phi(\underline{r})\Big|_{S_\alpha} = \Phi_\alpha$



$\Phi(\underline{r}) \xrightarrow[r\to\infty]{} 0$

sowie Gesamtladungen Q_α auf den Leitern
(Dirichlet'sches Randwertproblem)

Lösung

$$\Phi = \underbrace{\Phi_{inhom}}_{\substack{\text{spezielle Lösung}\\ \text{für geg. } \varrho\\ \text{zu Randbed. bei } \infty}} + \underbrace{\Phi_{hom}}_{\substack{\text{allg. Lös. für } \varrho = 0 \text{ zu geg. Randbed.}\\ \Delta\Phi = 0 \text{ (Laplace-Gl.)}}}$$

$$\boxed{\Phi(\underline{r}) = \int_V d^3r'\, G(\underline{r}-\underline{r}')\varrho(\underline{r}') + \epsilon_0 \sum_{\alpha=1}^{n} \Phi_\alpha \int_{S_\alpha} d\underline{f}' \cdot \underline{\nabla}_{r'} G(\underline{r}-\underline{r}')} \quad (*)$$

wobei: die Green'sche Fkt. $G(\underline{r}-\underline{r}')$ die Lösung
von $\Delta_r G(\underline{r}-\underline{r}') = -\frac{1}{\epsilon_0}\delta(\underline{r}-\underline{r}')$ zu den Randbed.

$$G(\underline{r}-\underline{r}')\Big|_{\substack{\underline{r}\in S_\alpha \\ \underline{r}'\in V}} = 0 \quad , \quad G(\underline{r}-\underline{r}') \xrightarrow[r\to\infty]{} 0$$

Beweis:

Aus dem Gauß'schen Satz

$$\int_{\partial V} d\underline{f}\cdot\underline{v} = \int_V d^3r\, \mathrm{div}\,\underline{v}$$

folgt mit $\underline{v} = \psi\underline{\nabla}\varphi$

$$\int_{\partial V} d\underline{f}\,\psi\underline{\nabla}\varphi = \int_V d^3r\,(\psi\Delta\varphi + \underline{\nabla}\psi\,\underline{\nabla}\varphi)$$

bzw. mit $\underline{v} = \varphi\underline{\nabla}\psi$

$$\int_{\partial V} d\underline{f}\,\varphi\underline{\nabla}\psi = \int_V d^3r\,(\varphi\Delta\psi + \underline{\nabla}\psi\,\underline{\nabla}\varphi)$$

$\Longrightarrow$ **Green'scher Satz:**

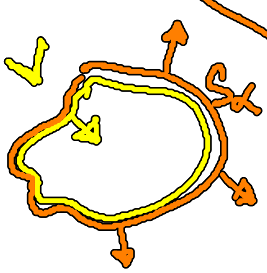
$$\int_{\partial V} d\underline{f}\,(\varphi\underline{\nabla}\psi - \psi\underline{\nabla}\varphi) = \int_V d^3r\,(\varphi\Delta\psi - \psi\Delta\varphi)$$

Wähle $\psi(\underline{r}) := G(\underline{r}-\underline{r}')$, $\varphi(\underline{r}) := \phi(\underline{r})$ $\quad \partial V = \bigcup_{\alpha=1}^{n} S_\alpha$

(i) zeige: $\Delta\phi = -\frac{1}{\epsilon_0}\rho \Longrightarrow \phi(\underline{r}) = ⊛$

$$\int_{\partial V} d\underline{f}\,\phi(\underline{r})\underline{\nabla}_r G(\underline{r}-\underline{r}') - \underbrace{\int_{\partial V} d\underline{f}\, G(\underline{r}-\underline{r}')\underline{\nabla}\phi}_{0 \text{ da } G|_{\underline{r}\in S_\alpha}=0} = -\frac{1}{\epsilon_0}\Big[\underbrace{\int_V d^3r\,\phi(\underline{r})\,\delta(\underline{r}-\underline{r}')}_{\phi(\underline{r}')} - \int_V d^3r\, G(\underline{r}-\underline{r}')\,\rho(\underline{r})\Big]$$

Vorzeichenwechsel $\bigcup_{\alpha=1}^{n} S_\alpha$



$$\Rightarrow \phi(\underline{r}') = \int_V d^3r\, G(\underline{r}-\underline{r}')\rho(\underline{r}) + \epsilon_0 \sum_\alpha \phi_\alpha \oint_{S_\alpha} d\underline{f} \cdot \underline{\nabla}_r G(\underline{r}-\underline{r}')$$

(ii) zeige $\phi(\underline{r}) = (*)$ $\Longrightarrow \begin{cases} \Delta\phi = -\frac{1}{\epsilon_0}\rho & \text{im Innern v. } V \\ \phi \text{ erfüllt Randbed.} \end{cases}$

Randbed.

$$\phi(\underline{r}')\Big|_{\underline{r}'\in S_\beta} = \underbrace{\int_V d^3r\, G(\underline{r}-\underline{r}')\Big|_{\underline{r}'\in S_\beta}}_{0} \rho(\underline{r}) + \epsilon_0 \sum_\alpha \phi_\alpha \oint_{S_\alpha} d\underline{f} \cdot \underline{\nabla}_r G(\underline{r}-\underline{r}')\Big|_{\underline{r}\in S_\beta}$$

Vorzeichenwechsel!

$$= -\epsilon_0 \int_{\partial V} \phi(\underline{r}) \underline{\nabla}_r G(\underline{r}-\underline{r}')\Big|_{\underline{r}'\in S_\beta} d\underline{f}$$

Green'scher Satz

$$= -\epsilon_0 \Big[\underbrace{\int_{\partial V} d\underline{f}\, G(\underline{r}-\underline{r}')\Big|_{\underline{r}'\in S_\beta} \underline{\nabla}_r \phi}_{0} + \underbrace{\int d^3r\, \big(\phi \underbrace{\Delta_r G(\underline{r}-\underline{r}')}_{-\frac{1}{\epsilon_0}\delta(\underline{r}-\underline{r}')}}_{-\frac{1}{\epsilon_0}\phi(\underline{r}')|_{\underline{r}'\in S_\beta}} - \underbrace{G(\underline{r}-\underline{r}')\Big|_{\underline{r}'\in S_\beta} \Delta\phi}_{0} \big) \Big]$$

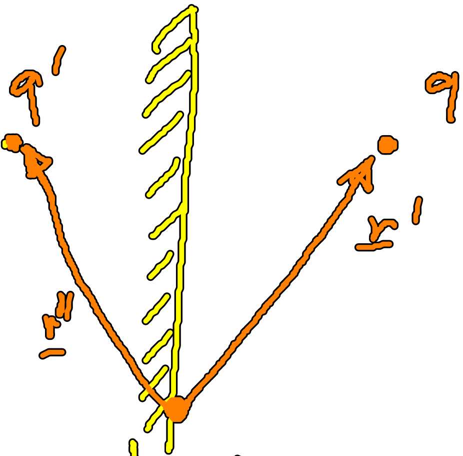
$$= \phi_\beta \qquad \square$$

<u>Ladung</u>: $Q_\alpha = \oint_{S_\alpha} df\, \sigma = \epsilon_0 \oint_{S_\alpha} df\, \underline{n}\underline{E} = -\epsilon_0 \oint_{S_\alpha} d\underline{f}\, \underline{\nabla}\phi$

<u>Konstruktion der Green'schen Fkt.</u>

Leiteroberflächen mit hoher Symmetrie:

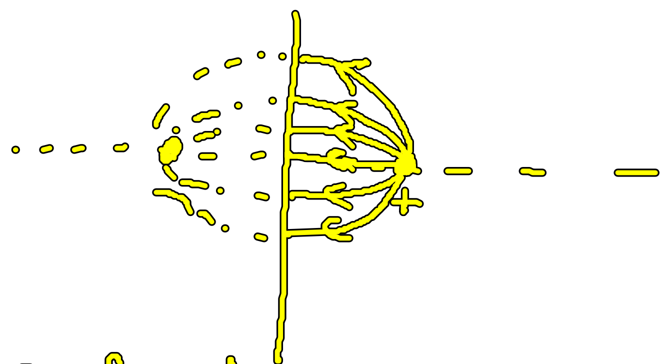
<u>Methode der Bildladungen</u> (Spiegelladungen)



$\phi_L = 0$

Wähle fiktive Bildladung q' bei $\underline{r}''$ im Leiter, so dass Potenzial beider Ladungen auf der Leiteroberfläche verschwindet: $q' = -q$

$$G(\underline{r}-\underline{r}') = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|} - \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}''|}\right)$$



Dipolpotenzial