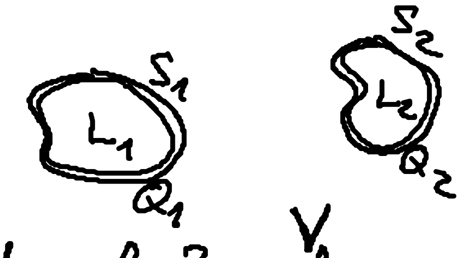
2. Grundaufgabe

geg.: Leiter L_α (Oberfläche S_α), $\alpha = 1, \ldots, n$
mit Ladungen Q_α;
Raumladungsdichte $\rho(\underline{r})$ im Außenraum V

gesucht: $\phi(\underline{r})$; ϕ_α



Lösung: Zurückführen auf
1. Grundaufgabe durch Zus.hang
zwischen Q_α und ϕ_α:

Es gilt: $\boxed{Q_\alpha = \sum_{\beta=1}^{n} C_{\alpha\beta}\,\phi_\beta}$ $\quad \alpha = 1, \ldots, n$

mit Kapazitätskoeffizienten $C_{\alpha\beta}$

Beweis: $Q_\alpha = -\epsilon_0 \oint_{S_\alpha} d\underline{f} \cdot \underline{\nabla}\phi(\underline{r})$

$$\overset{\text{Lösung }\phi}{=} -\epsilon_0 \oint_{S_\alpha} d\underline{f} \cdot \underline{\nabla}_r \int_V d^3r'\, G(\underline{r}-\underline{r}')\,\rho(\underline{r}')$$

$$-\epsilon_0^2 \oint_{S_\alpha} d\underline{f} \cdot \underline{\nabla}_r \sum_\beta \phi_\beta \oint_{S_\beta} d\underline{f}' \cdot \underline{\nabla}_{r'} G(\underline{r}-\underline{r}')$$

$$\overset{\text{gauß}}{=} -\epsilon_0 \int_{L_\alpha} d^3r \int_V d^3r' \underbrace{\Delta_r G(\underline{r}-\underline{r}')}_{-\frac{1}{\epsilon_0}\delta(\underline{r}-\underline{r}') = 0 \quad \underline{r}\in L_\alpha,\ \underline{r}'\in V} \rho(\underline{r}')$$

$$- \sum_{\beta=1}^{n} \phi_\beta \underbrace{\epsilon_0^2 \oint_{S_\alpha} d\underline{f} \cdot \underline{\nabla}_r \oint_{S_\beta} d\underline{f}' \cdot \underline{\nabla}_{r'} G(\underline{r}-\underline{r}')}_{=: -C_{\alpha\beta}}$$

$$= \sum_{\beta=1}^{n} C_{\alpha\beta}\phi_\beta$$

Aus der Symmetrie $G(\underline{r}-\underline{r}') = G(\underline{r}'-\underline{r})$ folgt

$$\boxed{C_{\alpha\beta} = C_{\beta\alpha}}$$

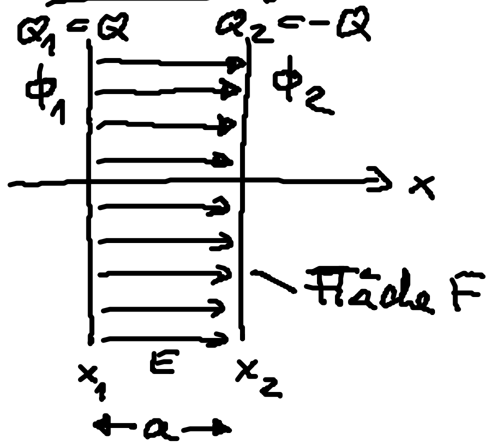
Einheit der Kapazität $1\,F = 1\,\frac{C}{V}$ = 1 Farad

(M. Faraday 1791 – 1867)

betrachte speziell einzelnen Leiter mit Pot. ϕ_L

$$C = \frac{Q}{\Phi_L}$$ Kapazität des Leiters

Beispiel: Plattenkondensator



$$Q_1 = C_{11}\phi_1 + C_{12}\phi_2$$
$$Q_2 = C_{21}\phi_1 + C_{22}\phi_2$$
$$C_{12} = C_{21} \equiv C'$$

Symm. $1 \leftrightarrow 2 \Rightarrow C_{11} = C_{22} \equiv C$

Spezialfall $Q_1 + Q_2 = 0$

$$Q = C\phi_1 + C'\phi_2$$
$$-Q = C'\phi_1 + C\phi_2$$
$$0 = (C + C')(\phi_1 + \phi_2)$$
$$\Rightarrow C = -C'$$
$$C = -C' = \frac{Q}{\phi_1 - \phi_2} \quad (1)$$

$$\sigma = \frac{Q}{F} = \epsilon_0 E = \text{const.} \quad (2)$$

$$\Rightarrow \phi(x) = -Ex + \phi_0$$

$$\phi_1 - \phi_2 = E\underbrace{(x_2 - x_1)}_{a} \quad (3)$$

(1),(3),(2) $\Rightarrow$ $$\boxed{C = -C' = \frac{Q}{Ea} = \epsilon_0 \frac{F}{a}}$$

Inverse der Kapazitätsmatrix

$$\phi_\alpha = \sum_{\beta=1}^{n} (C^{-1})_{\alpha\beta}\, Q_\beta \qquad (C^{-1})_{\alpha\beta} \neq (C_{\alpha\beta})^{-1}$$

eingesetzt in die Lösung der 1. Grundaufgabe

$\Rightarrow$ $\phi(\underline{r})$ für gegebene Q_β, $\rho(\underline{r})$

Energie des Feldes im Außenraum $\left(\rho(\underline{r})=0\right)$

$$W = \frac{\epsilon_0}{2}\int_V d^3r\, |\underline{E}(\underline{r})|^2$$

differenzielle Änderung der Randbed. auf den Leitern L_α

$$Q_\alpha \longrightarrow Q_\alpha + \delta Q_\alpha$$

$$\phi_\alpha \longrightarrow \phi_\alpha + \delta\phi_\alpha$$

Lösung $\phi(\underline{r}) \longrightarrow \phi(\underline{r}) + \delta\phi(\underline{r})$

Vertauschung von $\underline{\nabla}$ und δ

Vorzeichenwechsel

$$\Longrightarrow \delta W = \frac{\epsilon_0}{2}\int d^3r\, 2\underline{E}(\underline{r})\,\delta\underline{E}(\underline{r})$$

$$= -\epsilon_0 \int_V d^3r\, \underbrace{\left[\underline{\nabla}\phi(\underline{r})\right]\delta\underline{E}(\underline{r})}_{\underline{\nabla}(\phi\delta\underline{E}) - \phi\,\underline{\nabla}\delta\underline{E}}$$

$$\delta W \overset{\text{gauß}}{=} +\epsilon_0 \sum_\alpha \oint_{S_\alpha} d\underline{f}\left(\phi(\underline{r})\delta\underline{E}(\underline{r})\right)$$

$\delta\, \underline{\nabla}\cdot\underline{E} = 0$ in V, da $\rho = 0$

$$= \epsilon_0 \sum_\alpha \phi_\alpha \oint_{S_\alpha} d\underline{f}\,\delta\underline{E}(\underline{r})$$

$$= \sum_\alpha \phi_\alpha \delta Q_\alpha \qquad Q_\alpha = \sum_\beta C_{\alpha\beta}\phi_\beta$$

$$= \sum_{\alpha\beta} \phi_\alpha C_{\alpha\beta}\delta\phi_\beta$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{\alpha\beta} C_{\alpha\beta}\phi_\alpha\delta\phi_\beta + \frac{1}{2}\sum_{\alpha\beta} \underbrace{C_{\beta\alpha}}_{C_{\alpha\beta}}\phi_\beta\delta\phi_\alpha$$

$$= \delta\left\{\frac{1}{2}\sum_{\alpha\beta} C_{\alpha\beta}\phi_\alpha\phi_\beta\right\}$$

$$\Longrightarrow \boxed{W = \frac{1}{2}\sum_{\alpha\beta} C_{\alpha\beta}\phi_\alpha\phi_\beta} \quad \text{Feldenergie}$$

2. Stationäre Ströme und Magnetfeld

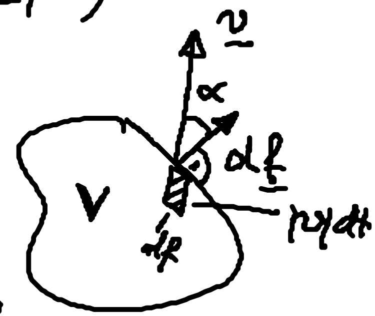
2.1 Kontinuitätsgleichung

Bewegte Ladungen $\longrightarrow$ el. Strom I

Exp. Erfahrung: Erhaltung der el. Ladung

$$Q(t) = \int_V d^3r\, \rho(\underline{r},t)$$

$\Rightarrow$ globaler Erhaltungssatz



$$\frac{dQ}{dt} \equiv \frac{d}{dt}\int_V d^3r\, \rho(\underline{r},t) = -\oint_{\partial V} \delta I$$

$$\delta I = \frac{\rho\, dV}{dt} = \frac{\rho\, |\underline{v}|\, dt\, |d\underline{f}| \cos\alpha}{dt} = \rho\, \underline{v}\cdot d\underline{f}$$

(Ladung, die durch $d\underline{f}$ pro Zeit aus V herausströmt)

Elektr. Stromdichte $\quad \underline{j}(\underline{r},t) := \rho(\underline{r},t)\, \underline{v}(\underline{r},t) \quad$ lokal

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\int_V d^3r\, \rho(\underline{r},t) = -\oint_{\partial V} d\underline{f}\cdot\underline{j} \overset{\text{Gauß}}{=} -\int_V d^3r\, \operatorname{div}\underline{j}$$

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}\rho(\underline{r},t) + \operatorname{div}\underline{j}(\underline{r},t) = 0}$$

Kontinuitätsgl.

lokaler Erhalt. satz

speziell: stationäre Ladungsverteil. $\Rightarrow \operatorname{div}\underline{j} = 0$

(nicht notwendig $\underline{j} = 0$!)

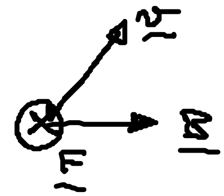
2.2 Magnet. Induktion

WW zwischen bewegten Ladungen:

Kraft auf Ladung q, die sich mit $\underline{v}$ bewegt:

$$\boxed{\underline{F} = q\underline{v} \times \underline{B}(\underline{r})}$$ Lorentz-Kraft

$\underline{B}(\underline{r})$ = magn. Induktion (magn. Flussdichte) am Ort $\underline{r}$, erzeugt durch von anderen bewegten Ladungen mit Stromdichte $\underline{j}(\underline{r}')$



$$\boxed{\underline{B}(\underline{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \, \underline{j}(\underline{r}') \times \frac{\underline{r}-\underline{r}'}{|\underline{r}-\underline{r}'|^3}}$$ Ampère-Gesetz

(Analog zur Coulomb-WW in der El.statik
$\underline{F} = q\underline{E}(\underline{r})$
$$\underline{E}(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int d^3r' \rho(\underline{r}') \frac{\underline{r}-\underline{r}'}{|\underline{r}-\underline{r}'|^3}$$)

Einheiten $[B] = 1 \frac{Ns}{Cm} = 1\,T$ (Tesla)

$\Rightarrow \mu_0 = 1{,}26 \cdot 10^{-6} \frac{Vs}{Am}$ (absolute Permeabilität)

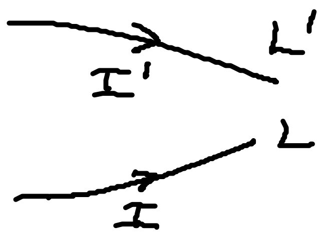
keine neue, von der Coulomb-WW unabhängige WW!

(Gauß-System: $\underline{F} = \frac{q}{c} \underline{v} \times \underline{B}$
$$\underline{B} = \frac{1}{c} \int d^3r' \, \underline{j}(\underline{r}') \times \frac{\underline{r}-\underline{r}'}{|\underline{r}-\underline{r}'|^3}$$)

$$[B] = \frac{dyn}{ESE} = \frac{\sqrt{dyn}}{cm} = 1\,G = 1 \text{ Gauß}$$

$$1\,G/c = 10^{-4}\,T$$

Kraft zwischen 2 stromdurchflossenen Leitern



Betrachte 2 'dünne' Leiter L, L' mit zeitkonstanten Strömen I, I'

Strom durch L': $$\underline{j}\, d^3r' = \rho\, d^3r' \underbrace{\underline{v}'}_{\frac{d\underline{r}'}{dt}} = \underbrace{\rho \frac{d^3r'}{dt}}_{I'} d\underline{r}' = I'\, d\underline{r}'$$

$\Rightarrow$ magn. Ind.

$$\underline{B}(\underline{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} I' \int_{L'} d\underline{r}' \times \frac{\underline{r}-\underline{r}'}{|\underline{r}-\underline{r}'|^3}$$

Kraft auf Ladung im Vol.el. d^3r von L:

$$d\underline{F} = \rho\, \underline{v} \times \underline{B}\, d^3r = \underline{j} \times \underline{B}\, d^3r = I\, d\underline{r} \times \underline{B}$$

$$\Rightarrow \boxed{\underline{F} = \frac{\mu_0}{4\pi} I I' \int_L d\underline{r} \times \int_{L'} d\underline{r}' \times \frac{\underline{r}-\underline{r}'}{|\underline{r}-\underline{r}'|^3}}$$

Kraft von L' auf L