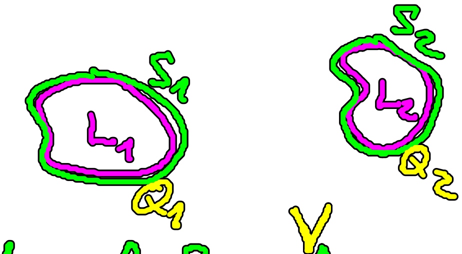
2. Grundaufgabe

geg.: Leiter L_α (Oberfläche S_α), $\alpha = 1, \dots, n$
mit Ladungen Q_α;
Raumladungsdichte $\rho(\underline{r})$ im Außenraum V

gesucht: $\phi(\underline{r})$; ϕ_α



Lösung: Zurückführen auf 1. Grundaufgabe durch Zus.hang zwischen Q_α und ϕ_α:

Es gilt: $\boxed{Q_\alpha = \sum_{\beta=1}^{n} C_{\alpha\beta}\,\phi_\beta}$ $\quad \alpha = 1, \dots, n$

mit Kapazitätskoeffizienten $C_{\alpha\beta}$

Beweis: $Q_\alpha = -\epsilon_0 \oint_{S_\alpha} d\underline{f} \cdot \underline{\nabla}\,\phi(\underline{r})$

$$\overset{\text{Lösung } \phi}{=} -\epsilon_0 \oint_{S_\alpha} d\underline{f} \cdot \underline{\nabla}_r \int_V d^3r'\, G(\underline{r}-\underline{r}')\,\rho(\underline{r}')$$

$$-\epsilon_0^2 \oint_{S_\alpha} d\underline{f}\cdot\nabla_r \sum_\beta \phi_\beta \oint_{S_\beta} d\underline{f}'\cdot\nabla_{r'}\, G(\underline{r}-\underline{r}')$$

gauß

$$= -\epsilon_0 \int_{L_\alpha} d^3r \int_V d^3r' \underbrace{\Delta_r G(\underline{r}-\underline{r}')}_{-\frac{1}{\epsilon_0}\delta(\underline{r}-\underline{r}')=0}\, \rho(\underline{r}') \qquad \underline{r}\in L_\alpha,\ \underline{r}'\in V$$

$$-\sum_{\beta=1}^{n} \phi_\beta \underbrace{\epsilon_0^2 \oint_{S_\alpha} d\underline{f}\cdot\nabla_r \oint_{S_\beta} d\underline{f}'\cdot\nabla_{r'}\, G(\underline{r}-\underline{r}')}_{=:\,-C_{\alpha\beta}}$$

$$= \sum_{\beta=1}^{n} C_{\alpha\beta}\phi_\beta$$

Aus der Symmetrie $G(\underline{r}-\underline{r}') = G(\underline{r}'-\underline{r})$
folgt

$$\boxed{C_{\alpha\beta} = C_{\beta\alpha}}$$

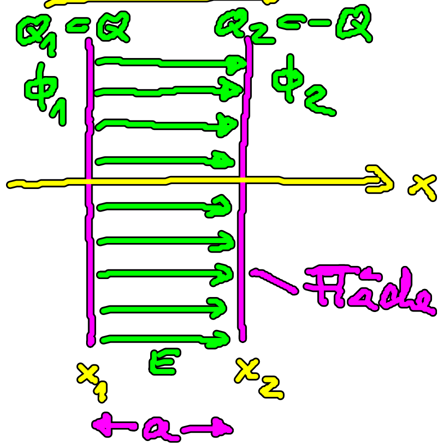
Einheit der Kapazität $1\,F = 1\,\frac{C}{V} = 1$ Farad

(M. Faraday 1791 – 1867)

Betrachte speziell einzelnen Leiter mit Pot. ϕ_L

$$C = \frac{Q}{\Phi_L}$$ Kapazität des Leiters

Beispiel: Plattenkondensator



$$\left.\begin{aligned} Q_1 &= C_{11}\Phi_1 + C_{12}\Phi_2 \\ Q_2 &= C_{21}\Phi_1 + C_{22}\Phi_2 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} C_{12} &= C_{21} \\ &\equiv C' \end{aligned}$$

Symm. $1 \leftrightarrow 2 \Rightarrow C_{11} = C_{22} \equiv C$

Spezialfall $Q_1 + Q_2 = 0$

$$\begin{aligned} Q &= C\Phi_1 + C'\Phi_2 \\ -Q &= C'\Phi_1 + C\Phi_2 \\ \hline 0 &= (C+C')(\Phi_1+\Phi_2) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow C = -C'$$

$$C = -C' = \frac{Q}{\Phi_1 - \Phi_2} \quad (1)$$

$$\sigma = \frac{Q}{F} = \varepsilon_0 E = \text{const.} \quad (2)$$

$$\Rightarrow \Phi(x) = -Ex + \Phi_0$$

$$\Phi_1 - \Phi_2 = E\underbrace{(x_2 - x_1)}_{a} \quad (3)$$

$$(1),(3),(2) \Rightarrow \boxed{C = -C' = \frac{Q}{Ea} = \varepsilon_0 \frac{F}{a}}$$

Inverse der Kapazitätsmatrix

$$\Phi_\alpha = \sum_{\beta=1}^{n} (C^{-1})_{\alpha\beta} Q_\beta \qquad (C^{-1})_{\alpha\beta} \neq (C_{\alpha\beta})^{-1}$$

eingesetzt in die Lösung der 1. Grundaufgabe

$\Rightarrow \Phi(\underline{r})$ für gegebene Q_β, $\rho(\underline{r})$

Energie des Feldes im Außenraum ($\rho(\underline{r})=0$)

$$W = \frac{\epsilon_0}{2} \int_V d^3r\, |\underline{E}(\underline{r})|^2$$

differenzielle Änderung der Randbed. auf den Leitern L_α

$$Q_\alpha \longrightarrow Q_\alpha + \delta Q_\alpha$$

$$\Phi_\alpha \longrightarrow \Phi_\alpha + \delta\Phi_\alpha$$

Lösung $\Phi(\underline{r}) \longrightarrow \Phi(\underline{r}) + \delta\Phi(\underline{r})$

Vertauschung von $\underline{\nabla}$ und δ

$$\Longrightarrow \delta W = \frac{\epsilon_0}{2} \int d^3r\, 2\underline{E}(\underline{r})\, \delta\underline{E}(\underline{r})$$

$$= -\epsilon_0 \int_V d^3r\, \underbrace{[\underline{\nabla}\Phi(\underline{r})]\,\delta\underline{E}(\underline{r})}_{\underline{\nabla}(\Phi\delta\underline{E}) - \Phi\underline{\nabla}\delta\underline{E}}$$

Vorzeichenwechsel

$\delta\, \underline{\nabla}\cdot\underline{E} = 0$ in V, da $\rho = 0$

$$\delta W \stackrel{\text{Gauß}}{=} +\epsilon_0 \sum_\alpha \oint_{S_\alpha} d\underline{f}\, (\Phi(\underline{r})\,\delta\underline{E}(\underline{r}))$$

$$= \epsilon_0 \sum_\alpha \Phi_\alpha \underbrace{\oint_{S_\alpha} d\underline{f}\, \delta\underline{E}(\underline{r})}$$

$$= \sum_\alpha \Phi_\alpha \delta Q_\alpha \qquad Q_\alpha = \sum_\beta C_{\alpha\beta}\Phi_\beta$$

$$= \sum_{\alpha\beta} \Phi_\alpha C_{\alpha\beta} \delta\Phi_\beta$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{\alpha\beta} C_{\alpha\beta}\Phi_\alpha\delta\Phi_\beta + \frac{1}{2}\sum_{\alpha\beta} \underbrace{C_{\beta\alpha}}_{C_{\alpha\beta}}\Phi_\beta\delta\Phi_\alpha$$

$$= \delta\left\{\frac{1}{2}\sum_{\alpha\beta} C_{\alpha\beta}\Phi_\alpha\Phi_\beta\right\}$$

$$\Longrightarrow \boxed{W = \frac{1}{2}\sum_{\alpha\beta} C_{\alpha\beta}\Phi_\alpha\Phi_\beta} \quad \text{Feldenergie}$$

2. Stationäre Ströme und Magnetfeld

2.1 Kontinuitätsgleichung

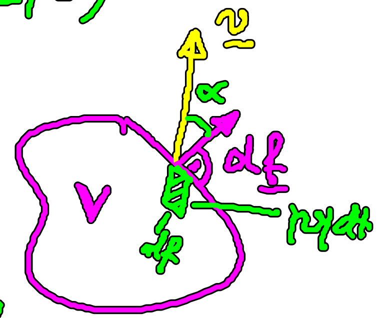
Bewegte Ladungen $\longrightarrow$ el. Strom I

<u>Exp. Erfahrung</u>: Erhaltung der el. Ladung

$$Q(t) = \int_V d^3r\, \rho(\underline{r},t)$$

$\Rightarrow$ <u>globaler</u> Erhaltungssatz

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{d}{dt}\int_V d^3r\, \rho(\underline{r},t) = -\oint_{\partial V} \delta I$$



$$\delta I = \frac{\rho\, dV}{dt} = \frac{\rho\, |\underline{v}|\, dt\, |d\underline{f}| \cos\alpha}{dt} = \rho\, \underline{v}\cdot d\underline{f}$$

(Ladung, die durch $d\underline{f}$ pro Zeit aus V herausströmt)

<u>Elektr. Stromdichte</u> $\quad \underline{j}(\underline{r},t) := \rho(\underline{r},t)\, \underline{v}(\underline{r},t)$ <u>lokal</u>

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\int_V d^3r\, \rho(\underline{r},t) = -\oint_{\partial V} d\underline{f}\cdot \underline{j} \overset{\text{Gauß}}{=} -\int_V d^3r\, \operatorname{div} \underline{j}$$

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}\rho(\underline{r},t) + \operatorname{div} \underline{j}(\underline{r},t) = 0}$$

<u>Kontinuitätsgl.</u>

lokaler Erhalt.-Satz

speziell: <u>stationäre</u> Ladungsverteil. $\Rightarrow \operatorname{div} \underline{j} = 0$

(nicht notwendig $\underline{j} = 0$!)

2.2 Magnet. Induktion

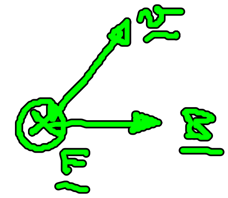
WW zwischen bewegten Ladungen:

Kraft auf Ladung q, die sich mit $\underline{v}$ bewegt:

$$\boxed{\underline{F} = q\,\underline{v}\times\underline{B}(\underline{r})}$$

Lorentz-Kraft

$\underline{B}(\underline{r})$ = magn. Induktion (magn. Flussdichte) am Ort $\underline{r}$, erzeugt durch von anderen bewegten Ladungen mit Stromdichte $\underline{j}(\underline{r}')$



$$\boxed{\underline{B}(\underline{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3r'\,\underline{j}(\underline{r}')\times\frac{\underline{r}-\underline{r}'}{|\underline{r}-\underline{r}'|^3}}$$

Ampère-Gesetz

(Analog zur Coulomb-WW in der El.statik $\quad \underline{F} = q\underline{E}(\underline{r})$

$$\underline{E}(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int d^3r'\,\rho(\underline{r}')\,\frac{\underline{r}-\underline{r}'}{|\underline{r}-\underline{r}'|^3}$$)

Einheiten $\quad [B] = 1\,\frac{Ns}{Cm} = 1\,T$ (Tesla)

$\Rightarrow \mu_0 = 1{,}26\cdot 10^{-6}\,\frac{Vs}{Am}$ (absolute Permeabilität)

keine neue, von der Coulomb-WW unabhängige WW!

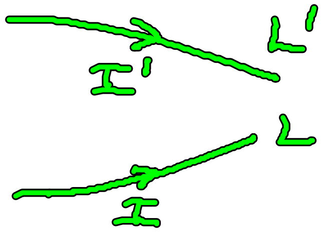
(Gauß-System: $\underline{F} = \frac{q}{c}\,\underline{v}\times\underline{B}$

$$\underline{B} = \frac{1}{c}\int d^3r'\,\underline{j}(\underline{r}')\times\frac{\underline{r}-\underline{r}'}{|\underline{r}-\underline{r}'|^3}$$)

$[B] = \frac{dyn}{ESE} = \frac{\sqrt{dyn}}{cm} = 1\,G = 1$ Gauß

$1\,G/c = 10^{-4}\,T$

Kraft zwischen 2 stromdurchflossenen Leitern



Betrachte 2 'dünne' Leiter L, L' mit zeitkonstanten Strömen I, I'

Strom durch L': $\underline{j}\, d^3r' = \rho\, d^3r' \underbrace{\underline{v}'}_{\frac{d\underline{r}'}{dt}} = \underbrace{\rho \frac{d^3r}{dt}}_{I'} d\underline{r}' = I'\, d\underline{r}'$

$\Rightarrow$ magn. Ind.

$$\underline{B}(\underline{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} I' \int_{L'} d\underline{r}' \times \frac{\underline{r}-\underline{r}'}{|\underline{r}-\underline{r}'|^3}$$

Kraft auf Ladung im Vol.el. d^3r von L:

$$d\underline{F} = \rho\, \underline{v} \times \underline{B}\, d^3r = \underline{j} \times \underline{B}\, d^3r = I\, d\underline{r} \times \underline{B}$$

$$\Rightarrow \boxed{\underline{F} = \frac{\mu_0}{4\pi} I I' \int_{L} d\underline{r} \times \int_{L'} d\underline{r}' \times \frac{\underline{r}-\underline{r}'}{|\underline{r}-\underline{r}'|^3}}$$

Kraft von L' auf L