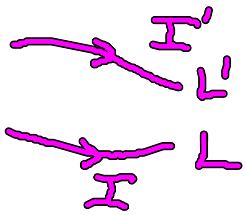
Lorentzkraft $\underline{F} = q\underline{v}\times\underline{B}$

Ampèregesetz $B(\underline{r})$



$$\underline{F} = \frac{\mu_0}{4\pi} I I' \int_L d\underline{r} \times \int_{L'} d\underline{r}' \times \frac{\underline{r}-\underline{r}'}{|\underline{r}-\underline{r}'|^3}$$

$$a\times(b\times c) = b(ac) - c(ab)$$

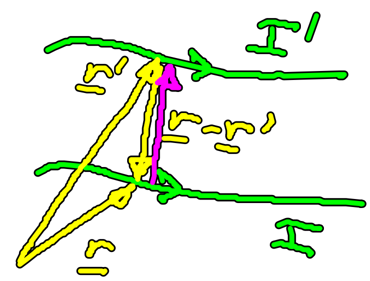
Mit $d\underline{r}\times\left(d\underline{r}'\times(\underline{r}-\underline{r}')\right) = \left(d\underline{r}\cdot(\underline{r}-\underline{r}')\right)d\underline{r}' - (d\underline{r}\cdot d\underline{r}')(\underline{r}-\underline{r}')$

und $\int_L d\underline{r}\,\frac{(\underline{r}-\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|^3} = -\frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|}\Big|_{L-\text{Anfang}}^{L-\text{Ende}} = 0$

folgt

$$\boxed{\underline{F} = -\frac{\mu_0}{4\pi} I I' \int_L\int_{L'} (d\underline{r}\cdot d\underline{r}')\,\frac{\underline{r}-\underline{r}'}{|\underline{r}-\underline{r}'|^3}}$$

für parallele Ströme ($I d\underline{r}\, I' d\underline{r}' > 0$):
Anziehung



für antipar. Ströme (< 0):
Abstoßung

2.3 Magnetostatische Feldgleichungen

zunächst: keine stationären Ströme vorausgesetzt

Mit dem Vektorpotenzial

$$\underline{A}(\underline{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^3} d^3r' \, \frac{\underline{j}(\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|}$$

nicht eindeutig!

Umeichung $\underline{A} \to \underline{A} + \underline{\nabla}\Phi$

mit bel. $\Phi(\underline{r},t)$,

$\underline{\nabla} \times \underline{\nabla}\Phi \equiv 0$

läßt sich

$$\boxed{\underline{B}(\underline{r}) = \operatorname{rot} \underline{A}(\underline{r})}$$

schreiben.

Beweis: $\underline{\nabla} \times \underline{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3r' \left(\underline{\nabla}_r \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|}\right) \times \underline{j}(\underline{r}')$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3r' \, \underline{j}(\underline{r}') \times \frac{(\underline{r}-\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|^3} = \underline{B}$$

Folgendes ist äquivalent:

(i) $\underline{B} = \operatorname{rot} \underline{A}$ Vektorpotenzial

$\Updownarrow$

(ii) $\boxed{\operatorname{div} \underline{B} = 0}$ $\underline{\nabla}\cdot(\underline{\nabla}\times\underline{A}) \equiv 0$

Es gibt keine Quellen der magn. Induktion („magn. Ladungen“)

$\Updownarrow$

Dirac: postuliert magn. Monopole ($< 10^{-35}$ s nach dem Urknall)

$$\oint_{\partial V} \underline{B}\cdot d\underline{f} = 0$$

Zusammenhang zwischen $\underline{B}$ und $\underline{j}$:

$$\operatorname{rot} \underline{B} = \underline{\nabla} \times (\underline{\nabla} \times \underline{A}) = \underline{\nabla}(\underline{\nabla}\cdot\underline{A}) - \Delta \underline{A}$$

$$\underline{\nabla}\cdot\underline{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3r' \, \underline{\nabla}_r \cdot \left(\frac{\underline{j}(\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|}\right)$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3r' \, \underline{j}(\underline{r}') \cdot \underbrace{\nabla_r \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|}}_{-\nabla_{r'} \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|}}$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^3} d^3r' \Big[\underbrace{-\nabla_{r'}\Big(\frac{\underline{j}(\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|}\Big)}_{0 \ (\text{gaußscher Satz!})} + \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|}\underbrace{\nabla_{r'}\cdot \underline{j}(\underline{r}')}_{-\frac{\partial}{\partial t}\rho \ (\text{Kontinu.-gl.})} \Big]$$

$$\underbrace{}_{-\frac{\partial}{\partial t}\underbrace{\frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3r' \frac{\rho(\underline{r}',t)}{|\underline{r}-\underline{r}'|}}_{\mu_0\epsilon_0\,\phi(\underline{r},t)}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\underline{\nabla}\,(\underline{\nabla}\cdot\underline{A}) = \mu_0\epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}\underline{E}}$$

$$\Delta \underline{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3r' \, \underline{j}(\underline{r}') \underbrace{\Delta_r \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|}}_{-4\pi\delta(\underline{r}-\underline{r}')} = -\mu_0 \underline{j}(\underline{r},t)$$

Also
$$\boxed{\text{rot}\,\underline{B} = \mu_0 \underline{j} + \underbrace{\mu_0\epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}\underline{E}}_{\substack{\text{Verschiebungsstromdichte} \\ \text{(nichtstationärer Beitrag)}}}}$$

Für stationäre Strom- u. Ladungsverteilungen

$$\boxed{\text{rot}\,\underline{B} = \mu_0 \underline{j}}$$
differenzielle Form des Ampère-Gesetzes

Integration über F

$$\int_F d\underline{f}\,\text{rot}\,\underline{B} \overset{\text{Stokes}}{=} \boxed{\oint_{\partial F} d\underline{s}\cdot\underline{B} = \mu_0 \int_F d\underline{f}\,\underline{j}(\underline{r}) = \mu_0 I}$$
Integralform (Durchflutungsgesetz)

Zusammenfassung

Magnetostatik	**Elektrostatik**
stationäre Ströme	statische Ladungsverteilung
$\boxed{\mathrm{div}\,\underline{B} = 0 \Leftrightarrow \underline{B} = \mathrm{rot}\,\underline{A}} \Leftrightarrow \oint_{\partial V} \underline{B}\,d\underline{f} = 0$ quellenfrei	$\boxed{\mathrm{rot}\,\underline{E} = 0 \Leftrightarrow \underline{E} = -\underline{\nabla}\phi} \Leftrightarrow \oint_{\partial F} \underline{E}\cdot d\underline{s} = 0$ wirbelfrei
$\boxed{\mathrm{rot}\,\underline{B} = \mu_0 \underline{j} \Leftrightarrow \oint_{\partial F} d\underline{s}\cdot\underline{B} = \mu_0 I}$ Ampère	$\boxed{\varepsilon_0\,\mathrm{div}\,\underline{E} = \rho \Leftrightarrow \varepsilon_0 \oint_{\partial V} d\underline{f}\cdot\underline{E} = Q}$ Gauß
$\Downarrow$	$\Downarrow$
$\boxed{\Delta \underline{A} = -\mu_0 \underline{j}(\underline{r})}$	$\boxed{\Delta\phi = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\underline{r})}$ Poisson-Gl.
nur falls $\mathrm{div}\,\underline{A} = 0$ (Coulomb-Eichung)	

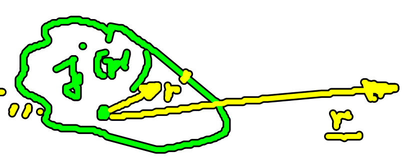
2.4 Magnetische Multipole (stationäre)

Ausgangspkt. $\underline{A}(\underline{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} d^3r' \, \frac{\underline{j}(\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|}$ $\quad \mathrm{div}\,\underline{A} = 0$

mit Randbed. $\underline{A}(\underline{r}) \to 0$ für $r \to \infty$

Taylorentw. von $\frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|}$ für räuml.-lokalisierte stationäre Stromverteilung $\underline{j}(\underline{r}')$ für $r' \ll r$ um $\underline{r}' = 0$

$$f(\underline{r}') = \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|} = \frac{1}{r} + \frac{1}{r^3}(\underline{r}\cdot\underline{r}') + \dots$$



$$\underline{A}(\underline{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi r}\int_{\mathbb{R}^3} d^3r'\, \underline{j}(\underline{r}') + \frac{\mu_0}{4\pi r^3}\int_{\mathbb{R}^3} d^3r'\, (\underline{r}\cdot\underline{r}')\,\underline{j}(\underline{r}') + \ldots$$

Monopol-Term:

Mit $\underline{\nabla}_{r'}\cdot\left[x_k'\,\underline{j}(\underline{r}')\right] = x_k'\underbrace{(\underline{\nabla}_{r'}\cdot\underline{j})}_{0 \text{ Statik!}} + \underbrace{\underline{j}\cdot\underline{\nabla}_{r'} x_k'}_{j_l\,\delta_{kl}} = j_k$

folgt

$$\int d^3r'\, j_k = \int_{\mathbb{R}^3} d^3r'\, \underline{\nabla}_{r'}\cdot\left[x_k'\,\underline{j}\right] \overset{\text{gauß}}{=} \int_{S(\infty)} d\underline{f}\cdot x_k'\,\underline{j} = 0$$

verschwindet

Dipol-Term:

Mit $(\underline{r}'\times\underline{j})\times\underline{r} = 2(\underline{r}\cdot\underline{r}')\,\underline{j} - \left[(\underline{r}\cdot\underline{j})\,\underline{r}' + (\underline{r}\cdot\underline{r}')\,\underline{j}\right]$ (*)

$$\underbrace{\underline{\nabla}_{r'}\cdot\left\{x_k'\,(\underline{r}\cdot\underline{r}')\,\underline{j}\right\}}_{\substack{\downarrow \\ \text{gauß} \\ \downarrow \\ S_\infty}} = \left[\underbrace{(\underline{r}\cdot\underline{r}')\,j_k + x_k'\,(\underline{r}\cdot\underline{j})}_{\text{kein Beitrag zu } \int}\right] + x_k'\,(\underline{r}\cdot\underline{r}')\,\underbrace{\underline{\nabla}\cdot\underline{j}}_{0}$$

$$\underline{A}(\underline{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi r^3}\,\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3} d^3r'\,(\underline{r}'\times\underline{j}(\underline{r}'))\times\underline{r}$$ **Dipolpotenzial**

$$\boxed{\underline{A}(\underline{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi r^3}\,\underline{m}\times\underline{r}}$$ mit $\underline{m} := \frac{1}{2}\int d^3r'\,\underline{r}'\times\underline{j}(\underline{r}')$

magn. Dipolmoment

(analog $\phi(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\,\underline{p}\cdot\underline{r}$ mit $\underline{p} := \int d^3r'\,\underline{r}'\,\rho(\underline{r}')$

el. Dipolmoment)

$$\underline{B}(\underline{r}) = \mathrm{rot}\left[\frac{\mu_0}{4\pi r^3}\,\underline{m}\times\underline{r}\right] = \frac{\mu_0}{4\pi}\,\frac{1}{r^5}\left[3\,(\underline{m}\cdot\underline{r})\,\underline{r} - r^2\,\underline{m}\right]$$

$$\left(\underline{E}(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{1}{r^5}\left[3\,(\underline{p}\cdot\underline{r})\,\underline{r} - r^2\,\underline{p}\right]\right.$$

el. Dipolfeld)