Dynam. Feldgleichungen:

(i) Statik als Grenzfall

(ii) linear in $\underline{E}$ u. $\underline{B}$

1. Ordn. in t

$$\underline{\nabla} \times \underline{E} = \cancel{a_1 \dot{\underline{E}}} + b_1 \dot{\underline{B}}$$

$$\underline{\nabla} \times \underline{B} - \mu_0 \underline{j} = a_2 \dot{\underline{E}} + \cancel{b_2 \dot{\underline{B}}}$$

6 Gln. legen $\underline{E}, \underline{B}$ für $t > 0$ fest

$$\epsilon_0 \underline{\nabla} \cdot \underline{E} - \rho = 0$$

$$\underline{\nabla} \cdot \underline{B} = 0$$

2 skalare Gln.

(iii) <u>TCP-Invarianz</u>

T_g oder P_g $\Longrightarrow$ $\underline{a_1 = 0}$

T_u oder P_u $\Longrightarrow$ $\underline{b_2 = 0}$

(iv) <u>Ladungserhaltung</u>

$$0 = \frac{\partial}{\partial t} \left[\epsilon_0 \underline{\nabla} \cdot \underline{E} - \rho \right] = \epsilon_0 \underline{\nabla} \cdot \dot{\underline{E}} - \dot{\rho}$$

$$= \frac{\epsilon_0}{a_2} \underline{\nabla} \cdot \left\{ \underline{\nabla} \times \underline{B} - \mu_0 \underline{j} \right\} - \dot{\rho}$$

$$0 = - \frac{\epsilon_0 \mu_0}{a_2} \underline{\nabla} \cdot \underline{j} - \dot{\rho}$$

Kontin.gl. $\quad 0 = \underline{\nabla} \cdot \underline{j} + \dot{\rho}$

$\Longrightarrow \quad a_2 = \epsilon_0 \mu_0 \quad \Rightarrow$ Verschiebungsstromdichte $\epsilon_0 \dot{\underline{E}}$

(v) Lorentzkraft

$$\underline{F} = q(\underline{E} + \underline{v} \times \underline{B})$$

soll aus einem Extremal-Prinzip (Hamilton'sches Prinzip) ableitbar sein.

Suche Lagrange-Fkt. $L(\underline{r}, \underline{v}, t)$, so dass die Lagrange-Gln.

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial v_k} - \frac{\partial L}{\partial x_k} = 0 \qquad k = 1,2,3$$

die (nichtrelativist.) Bewegungsgln. ergibt:

$$\boxed{L = \frac{m}{2} v^2 + q\left[\underline{v} \cdot \underline{A}(\underline{r},t) - \phi(\underline{r},t)\right]}$$

Tatsächlich

$$p_k = \frac{\partial L}{\partial v_k} = m v_k + q A_k(\underline{r},t) = \text{kanon. Impuls}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial v_k} = m \ddot{x}_k + q \frac{d}{dt} A_k(\underline{r},t)$$

totale Zeitabl. längs einer Bahn $\underline{r}(t)$

$$= m\ddot{x}_k + q\left(\frac{\partial}{\partial t} A_k + \frac{\partial A_k}{\partial x_l} \dot{x}_l\right)$$

$$= m\ddot{x}_k + q\left(\frac{\partial}{\partial t} + \underline{v} \cdot \underline{\nabla}\right) A_k$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_k} = q\left[\frac{\partial}{\partial x_k}(\underline{v} \cdot \underline{A}) - \frac{\partial}{\partial x_k}\phi\right]$$

$$\Longrightarrow 0 = m\ddot{x}_k + q\frac{\partial}{\partial t}A_k + q \underbrace{\left[(\underline{v}\cdot\underline{\nabla})A_k - \frac{\partial}{\partial x_k}(\underline{v}\,\underline{A})\right]}_{-[\underset{a}{\underline{v}} \times (\underset{b}{\underline{\nabla}} \times \underset{c}{\underline{A}})]_k} + q\frac{\partial}{\partial x_k}\phi$$

$$0 = m\ddot{\underline{r}} + q\left[\frac{\partial}{\partial t}\underline{A} + \underline{\nabla}\phi - \underline{v}\times(\underline{\nabla}\times\underline{A})\right]$$

$$q\,[-\underline{E} - \underline{v}\times\underline{B}]$$ Lorentzkraft

$$\Longrightarrow \boxed{\begin{aligned} \underline{E}(\underline{r},t) &= -\frac{\partial}{\partial t}\underline{A}(\underline{r},t) - \underline{\nabla}\phi(\underline{r},t) \\ \underline{B}(\underline{r},t) &= \underline{\nabla}\times\underline{A}(\underline{r},t) \end{aligned}}$$

$$\Longrightarrow \underline{\nabla}\times\underline{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\underbrace{\underline{\nabla}\times\underline{A}}_{\underline{B}} - \underbrace{\underline{\nabla}\times(\underline{\nabla}\phi)}_{0} \stackrel{!}{=} b_1\dot{\underline{B}}$$

Also $b_1 = -1$

<u>Vollständige Maxwell-Gln. im Vakuum</u> :

mit den neuen Feldgrößen

$$\underline{D}(\underline{r},t) := \epsilon_0\,\underline{E}(\underline{r},t)$$ „<u>dielektr. Verschiebung</u>"

$$\underline{H}(\underline{r},t) := \frac{1}{\mu_0}\underline{B}(\underline{r},t)$$ „<u>Magnetfeld</u>"

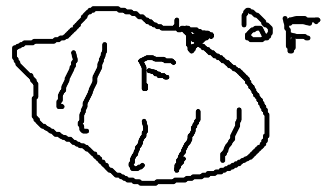
ergibt sich

$$\boxed{\begin{aligned} \underline{\nabla}\times\underline{E} + \frac{\partial}{\partial t}\underline{B} &= 0 \\ \underline{\nabla}\cdot\underline{B} &= 0 \\ \underline{\nabla}\cdot\underline{D} &= \rho \\ \underline{\nabla}\times\underline{H} - \frac{\partial}{\partial t}\underline{D} &= \underline{j} \end{aligned}}$$

(erste zwei Gleichungen:) homog. Gln.
Wechselwirkung einer Probeladung mit <u>geg.</u> Feldern $\underline{E}$, $\underline{B}$

(letzte zwei Gleichungen:) inhomog. Gln.:
Erzeugung der Felder $\underline{D}$, $\underline{H}$ durch geg. Ladungen u. Ströme

3.3 Induktionsgesetz



Integration von

$$\underline{\nabla} \times \underline{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\underline{B}$$

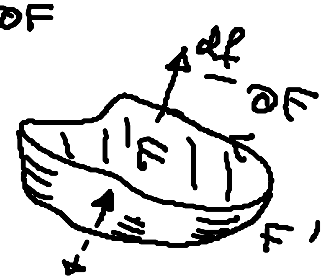
über Fläche F (ortsfest!)

$$\int d\underline{f}\, \mathrm{rot}\, \underline{E} \overset{\text{Stokes}}{=} \oint_{\partial F} d\underline{s} \cdot \underline{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_{F\,(\text{ortsfest!})} d\underline{f} \cdot \underline{B}$$

$$\boxed{\oint_{\partial F} d\underline{s} \cdot \underline{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \Phi(t)}$$

mit dem magn. Fluss $\Phi := \int_F d\underline{f} \cdot \underbrace{\underline{B}}_{\mathrm{rot}\,\underline{A}} = \oint_{\partial F} d\underline{s} \cdot \underline{A}$

Φ hängt nur vom Rand ∂F von F ab:



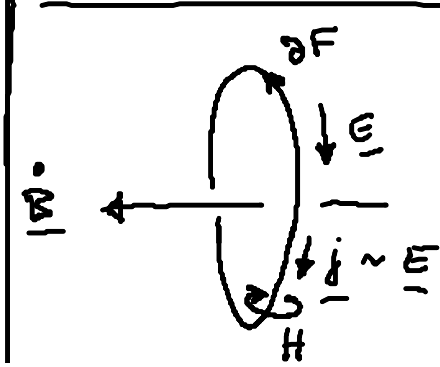
$$0 \overset{!}{=} \int_F d\underline{f} \cdot \underline{B} - \int_{F'} d\underline{f} \cdot \underline{B} = \oint_{\partial V} d\underline{f} \cdot \underline{B} \overset{\text{gauß}}{=} \int_V d^3r\, \underbrace{\mathrm{div}\, \underline{B}}_{0}$$

Potenzialdifferenz bei 1 Umlauf um ∂F

$$\Delta\phi := -\oint_{\partial F} d\underline{s}\, \underline{E}$$ induzierte Spannung (Wirbelfeld)

$$\boxed{\Delta\phi = \frac{\partial}{\partial t}\Phi}$$ Faraday'sches Induktionsgesetz

Lenz'sche Regel:



$\dot{\underline{B}} \Rightarrow \underline{E}$ induziert ($\mathrm{rot}\,\underline{E} = -\dot{\underline{B}}$)

$\underline{E} \Rightarrow$ Ladungsbeweg. $\Rightarrow \underline{j} \sim \underline{E}$

$\underline{j} \Rightarrow \underline{H}$ erzeugt ($\mathrm{rot}\,\underline{H} = \underline{j}$)

Also $\bar{H}$ ist $\dot{\underline{B}}$ <u>entgegengerichtet</u> !

Maxwell-Gln. in Integralform

$$\oint_{\partial F} d\underline{s} \cdot \underline{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \underline{\Phi}$$

Zirkulation des el. Feldes entlang einer geschlossenen Linie $= -\frac{\partial}{\partial t} \underline{\Phi}$, $\underline{\Phi} = \int_F d\underline{f} \cdot \underline{B}$ magn. Fluss

$$\oint_{\partial V} d\underline{f} \cdot \underline{B} = 0$$

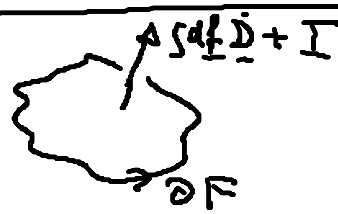
Fluss des magn. Feldes durch geschlossene Fläche $= 0$

$$\oint_{\partial V} d\underline{f} \cdot \underline{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} Q$$

Fluss des el. Feldes durch ∂V = eingeschlossene Ladung Q/ε_0

$$\oint_{\partial F} d\underline{s} \cdot \underline{H} = \int_F d\underline{f} \cdot \dot{\underline{D}} + I$$

Zirkulation des magn. Feldes entlang einer geschloss. Linie $=$ (diel. Verschieb.strom $\int d\underline{f} \cdot \dot{\underline{D}}$ + Konvektionsstrom $I = \int d\underline{f} \cdot \underline{j}$)



3.4 Energiebilanz

Die Maxwell-Gln. enthalten die Kontin.gl. für die el. Ladung

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \underline{\nabla} \cdot \underline{j} = 0 \quad \text{(Ladungserh.)}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\rho + \underline{\nabla}\,\underline{j} = \underline{\nabla}\cdot(\underline{\dot{D}} + \underline{j}) = \underline{\nabla}\cdot(\underline{\nabla}\times\underline{H}) \equiv 0 \right)$$

<u>Frage</u>: Enthalten die Maxwell-Gln. weitere <u>Erhaltungssätze</u> für „extensive" physik. Observable, z. B. Energie, Impuls, Drehimpuls?

(„Extensiv": additiv bei Systemzusammensetzung
„intensiv": nicht additiv, z. B. Temp.)