Energiebilanz:

Energietransport durch das el.magn. Feld:

$$\underline{\nabla}\times\underline{E} + \frac{\partial}{\partial t}\underline{B} = 0 \quad \Big|\cdot\underline{H}$$

$$\underline{\nabla}\times\underline{H} - \frac{\partial}{\partial t}\underline{D} = \underline{j} \quad \Big|\cdot\underline{E}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\underline{H}\cdot(\underline{\nabla}\times\underline{E}) - \underline{E}\cdot(\underline{\nabla}\times\underline{H})}_{\underline{\nabla}\cdot(\underline{E}\times\underline{H})} + \underbrace{\underline{H}\frac{\partial}{\partial t}\underline{B}}_{\frac{1}{\mu_0}\underline{B}\frac{\partial}{\partial t}\underline{B}} + \underbrace{\underline{E}\frac{\partial}{\partial t}\underline{D}}_{\epsilon_0\underline{E}\frac{\partial}{\partial t}\underline{E}} = -\underline{j}\cdot\underline{E}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2\mu_0}\underline{B}^2\right) \qquad \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\epsilon_0}{2}\underline{E}^2\right)$$

$$\underline{H}\cdot(\underline{\nabla}\times\underline{E})$$

$$\underline{E}\cdot(\underline{H}\times\underline{\nabla})$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial}{\partial t}w + \underline{\nabla}\cdot\underline{S} = -\underline{j}\cdot\underline{E}}$$

Kontinuitätsgl. = Bilanzgl. für Energietransport

mit $w := \frac{\epsilon_0}{2}\underline{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0}\underline{B}^2 = \frac{1}{2}(\underline{E}\cdot\underline{D} + \underline{B}\cdot\underline{H})$ Energiedichte

El.statik Magnetostatik

$\underline{S} := \underline{E}\times\underline{H}$ Energiestromdichte des el.magn. Feldes

(Poynting-Vektor)

$\sigma = -\underline{j} \cdot \underline{E}$ Quelldichte der Feldenergie (Leistungsdichte)

$\underline{j} \cdot \underline{E} > 0$ Abnahme
$\underline{j} \cdot \underline{E} < 0$ Zunahme
} der Feldenergie bei $(\underline{r}, t)$

Beispiel: Beschleunigung von Teilchen durch die Felder $\underline{E}, \underline{B}$:

Kraft auf Ladung q: $\underline{F} = q(\underline{E} + \underline{v} \times \underline{B})$

Kraftdichte $\underline{f} = \rho(\underline{E} + \underline{v} \times \underline{B})$

Leistungsdichte der Felder auf die Ladungen ρ:

$$\underline{f} \cdot \underline{v} = \underbrace{\rho \underline{v}}_{\underline{j}} \cdot \underline{E} + \rho \underline{v} \underbrace{(\underline{v} \times \underline{B})}_{0} = \underline{j} \cdot \underline{E}$$ vom Feld auf Ladungen übertragen

(= Verlustdichte der Feldenergie)

Also ist die Feldenergie keine Erhaltungsgröße!

1. Beispiel: Ohm'sche Gesetz

$\underline{j} = \sigma \underline{E}$ mit konstanter Leitfähigkeit $\sigma > 0$

(phänomenolog. Materialgesetz! gilt in Metallen u. Halbleitern für hinreichend kleine Felder $\underline{E}$)

$\Rightarrow$ Energiebilanz $\frac{\partial}{\partial t} w + \underline{\nabla} \cdot \underline{S} = -\sigma \underline{E}^2 < 0$

d.h. stets Verlust von Feldenergie

(Konsequenz des 2. Hauptsatzes der Thermodynamik)

Im Gegensatz zur Elektrodynamik der Felder ist das Ohm'sche Gesetz nicht zeitumkehrinvariant

$$t \to -t$$
$$\underline{j} \to -\underline{j}$$
aber $$\underline{E} \to \underline{E}$$

$\sigma \underline{E}^2$ wird als Joule'sche Wärme im Leiter dissipiert (Irreversibilität).

2. Beispiel: Antennenabstrahlung (offenes System)
$\underline{j}$ in der metall. Antenne ist dem Wechselfeld $\underline{E}$ außerhalb entgegengesetzt $\Rightarrow \underline{j} \cdot \underline{E} < 0$

$\Rightarrow$ Energiegewinn des Feldes

3.5 Impulsbilanz

Aus den Maxwell-Gln. folgt eine weitere Bilanzgl. für den Impulstransport durch das el. magn. Feld:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\underline{D}\times\underline{B}) = \underbrace{\dot{\underline{D}}}_{\nabla\times\underline{H}-\underline{j}}\times\underline{B} + \underline{D}\times\underbrace{\dot{\underline{B}}}_{-\nabla\times\underline{E}}$$

$$= -\frac{1}{\mu_0}\underline{B}\times(\nabla\times\underline{B}) - \underline{j}\times\underline{B} - \varepsilon_0\underline{E}\times(\nabla\times\underline{E})$$

Es gilt die Vektorumformung

$$\underline{B}\times(\nabla\times\underline{B}) = \frac{1}{2}\nabla(\underline{B}\cdot\underline{B}) - (\underline{B}\cdot\nabla)\underline{B}$$

$$= \nabla\cdot\left\{\mathbb{1}\frac{1}{2}(\underline{B}\cdot\underline{B}) - \underline{B}\otimes\underline{B}\right\} + \underline{B}\underbrace{(\nabla\cdot\underline{B})}_{0}$$

wobei: $\mathbb{1}$ Einheitstensor 2. Stufe $\begin{pmatrix}1&&0\\&1&\\0&&1\end{pmatrix}$

$\underline{B}\otimes\underline{B}$ das Tensorprodukt (dyad. Produkt) $(\underline{B}\otimes\underline{B})_{\alpha\beta} := B_\alpha B_\beta$

und $\nabla\cdot\{\ldots\}$ die Divergenz eines Tensors $\underline{\underline{T}}$ 2. Stufe

(In Komponenten gilt $(\nabla\cdot\underline{\underline{T}})_\beta = \partial_\alpha T_{\alpha\beta}$)

$$\underbrace{\partial_\alpha\,\delta_{\alpha\beta}}_{\partial_\beta}\frac{1}{2}(\underline{B}\cdot\underline{B})$$

$$\overbrace{(\nabla\cdot\underline{B})\underline{B}}^{\partial_\alpha B_\alpha B_\beta} = \underline{B}(\nabla\cdot\underline{B}) + (\underline{B}\cdot\nabla)\underline{B}$$

Analog: $\underline{E}\times(\nabla\times\underline{E}) = \nabla\cdot\left\{\mathbb{1}\frac{1}{2}(\underline{E}\cdot\underline{E}) - \underline{E}\otimes\underline{E}\right\} + \underline{E}\underbrace{(\nabla\cdot\underline{E})}_{\varrho/\varepsilon_0}$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}(\underline{D}\times\underline{B}) + \nabla\cdot\underbrace{\left\{\mathbb{1}\frac{1}{2}\left(\varepsilon_0\underline{E}^2 + \frac{1}{\mu_0}\underline{B}^2\right) - \varepsilon_0\underline{E}\otimes\underline{E} - \frac{1}{\mu_0}\underline{B}\otimes\underline{B}\right\}}_{T}$$

$$= -\underbrace{(\varrho\underline{E} + \underline{j}\times\underline{B})}$$

Kraftdichte $\underline{f}$, die von den Feldern auf Ladungen ϱ mit Stromdichte $\underline{j} = \varrho\underline{v}$ ausgeübt werden.

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial}{\partial t}\underline{g} + \underline{\nabla}\cdot\underline{\underline{T}} = -(\varrho\underline{E} + \underline{j}\times\underline{B})}$$ Bilanzgleichung für Impulstransport

mit

$\underline{g} := \underline{D}\times\underline{B}$ <u>Impulsdichte</u> des Feldes

(Nach Newton $\frac{d}{dt}\underline{p} = \underline{F} \Rightarrow \frac{d}{dt}\underline{g} = \underline{f}$)

$$\underline{\underline{T}} := \underline{\underline{1}}\,\frac{1}{2}(\underline{E}\cdot\underline{D} + \underline{B}\cdot\underline{H}) - \underline{E}\otimes\underline{D} - \underline{B}\otimes\underline{H}$$

<u>Impulsstromdichte</u>-Tensor des Feldes

(Maxwell'scher Spannungstensor)

in Komponenten:

$$T_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\delta_{\alpha\beta}(\underline{E}\cdot\underline{D} + \underline{B}\cdot\underline{H}) - E_\alpha D_\beta - B_\alpha H_\beta$$

(Stromdichte in α-Richtung der β-Komponente)
der Impulsdichte

Stromdichte

$$\mathrm{Sp}\,\underline{\underline{T}} = T_{\alpha\alpha} = \frac{3}{2}(\underline{E}\cdot\underline{D} + \underline{B}\cdot\underline{H}) \qquad \underline{g}$$

$$-(\underline{E}\cdot\underline{D} + \underline{B}\cdot\underline{H}) = \frac{1}{2}(\underline{E}\cdot\underline{D} + \underline{B}\cdot\underline{H})$$

$= w$ (Energiedichte)

$\underline{\underline{T}}$ ist <u>symmetrisch</u> : $T_{\alpha\beta} = T_{\beta\alpha}$

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}g_\beta + \frac{\partial}{\partial x_\alpha}T_{\alpha\beta} = -f_\beta}$$ Impulsaustausch zwischen Feld und geladenen Teilchen

<u>Bem.</u>: Eine analoge Bilanzgl. gilt für die <u>Drehimpulsdichte</u> des Feldes, sie beschreibt Drehimpulsaustausch zwischen Feld und geladenen Teilchen.