

3.6 Eichinvarianz

Darstellung der Felder \underline{E} , \underline{B} durch
Potenziale $\phi(\underline{r}, t)$, $\underline{A}(\underline{r}, t)$:

$$\underline{E} = -\underline{\nabla}\phi - \frac{\partial}{\partial t}\underline{A}, \quad \underline{B} = \underline{\nabla} \times \underline{A}$$

Frage: allgemeinste Trafo $\phi \rightarrow \phi'$, $\underline{A} \rightarrow \underline{A}'$,
welche \underline{E} , \underline{B} invariant läßt?

$$\underline{E} = -\underline{\nabla}\phi - \frac{\partial}{\partial t}\underline{A} \stackrel{!}{=} -\underline{\nabla}\phi' - \frac{\partial}{\partial t}\underline{A}'$$

$$\underline{B} = \underline{\nabla} \times \underline{A} \stackrel{!}{=} \underline{\nabla} \times \underline{A}' \Rightarrow \underline{A}' = \underline{A} + \underline{\nabla}G(\underline{r}, t)$$

(da $\underline{\nabla} \times \underline{\nabla}G = 0$)

$$\Rightarrow -\underline{\nabla}\phi - \frac{\partial}{\partial t}\underline{A} \stackrel{!}{=} -\underline{\nabla}\phi' - \frac{\partial}{\partial t}(\underline{A} + \underline{\nabla}G)$$

$$\Rightarrow \underline{\nabla}(\phi' - \phi + \frac{\partial}{\partial t}G) = 0$$

$$\Rightarrow \phi' - \phi + \frac{\partial}{\partial t}G = g(t) \quad \text{unabh. von } \underline{r}$$

Mit $F(\underline{r}, t) := G(\underline{r}, t) - \int_{t_0}^t g(t') dt'$

ergibt sich

$$\underline{A}'(\underline{r}, t) = \underline{A}(\underline{r}, t) + \underline{\nabla}F(\underline{r}, t)$$
$$\phi'(\underline{r}, t) = \phi(\underline{r}, t) - \frac{\partial}{\partial t}F(\underline{r}, t)$$

mit beliebiger Eichfkt. $F(\underline{r}, t)$

Durch $\underline{E} = -\underline{\nabla}\phi - \frac{\partial}{\partial t}\underline{A}$, $\underline{B} = \underline{\nabla}\times\underline{A}$
sind die homog. Maxwell-Gl. automatisch erfüllt:

$$\underline{\nabla}\times\underline{E} = -\underbrace{\underline{\nabla}\times\underline{\nabla}\phi}_0 - \frac{\partial}{\partial t}\underbrace{\underline{\nabla}\times\underline{A}}_{\underline{B}}, \quad \underline{\nabla}\cdot\underline{B} = 0$$

Die Umkehrung gilt auch:

$$\underline{\nabla}\cdot\underline{B} = 0 \Rightarrow \exists \underline{A} : \underline{B} = \underline{\nabla}\times\underline{A} \text{ (konstr.!)}$$

eingesetzt in

$$\underline{\nabla}\times\underline{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\underline{B} = -\underline{\nabla}\times\frac{\partial}{\partial t}\underline{A}$$

$$\Rightarrow \underline{\nabla}\times\left(\underline{E} + \frac{\partial}{\partial t}\underline{A}\right) = 0$$

$$\text{d.h. } \exists \phi : \underline{E} + \frac{\partial}{\partial t}\underline{A} = -\underline{\nabla}\phi \quad \square$$

Wähle nun eine Eichung, so dass die inhomogenen Maxwell-Gl. besonders einfach werden:

Ziel: Entkopplung der Dgl. für \underline{A} und ϕ

(i) Lorentz-Eichung

$$\underline{\nabla}\cdot\underline{A} + \epsilon_0\mu_0 \frac{\partial}{\partial t}\phi = 0$$

Hiermit werden die Feldgl. entkoppelt:

$$\text{a) } -\underline{\nabla}\cdot\underline{E} = \underline{\nabla}\cdot\left(\underline{\nabla}\phi + \frac{\partial}{\partial t}\underline{A}\right) = -\frac{1}{\epsilon_0}\rho$$

$$\Delta \phi + \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \underline{A} = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho$$

Lorentz-Eichung:

$$\Delta \phi - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \phi = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho$$

$$b) \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \underline{B} - \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \underline{E} = \underline{j}$$

$$\nabla \times (\nabla \times \underline{A}) + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \phi + \frac{\partial}{\partial t} \underline{A}) = \mu_0 \underline{j}$$

$$\nabla (\nabla \cdot \underline{A}) - \Delta \underline{A}$$

$$\Delta \underline{A} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \underline{A} - \nabla (\nabla \cdot \underline{A} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \phi) = -\mu_0 \underline{j}$$

Lorentz-Eichung

$$\Delta \underline{A} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \underline{A} = -\mu_0 \underline{j}$$

Zusammenfassung mit d'Alembert-Op. $\square := \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = 2.9979 \times 10^8 \frac{m}{s} \quad \text{Lichtgeschwindigkeit}$$

(= Ausbreitungsgeschw. el. magn. Wellen im Vakuum)

$$\square \phi = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho$$

$$\square \underline{A} = -\mu_0 \underline{j}$$

inhomogene Wellengl.
(entkoppelt!)

(ii) Coulomb-Eichung (Strahlungseichung)

$$\nabla \cdot \underline{A} = 0$$

Allg.: Zerlegung von $\underline{E} = -\underline{\nabla}\phi - \frac{\partial}{\partial t}\underline{A}$

in Longitudinalfeld $\underline{E}_\ell := -\underline{\nabla}\phi$ (wirbelfrei) } Def.
und Transversalfeld $\underline{E}_t := -\frac{\partial}{\partial t}\underline{A}$ (quellenfrei)

Tatsächlich gilt: $\underline{\nabla} \times \underline{E}_\ell = -\underline{\nabla} \times \underline{\nabla}\phi = 0$

$$\underline{\nabla} \cdot \underline{E}_t = -\frac{\partial}{\partial t} \underline{\nabla} \cdot \underline{A} = 0$$

$\sim e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$

$$\underline{\nabla} \times \underline{E} \rightarrow \mathbf{k} \times \underline{E}$$

$$\underline{\nabla} \cdot \underline{E} \rightarrow \mathbf{k} \cdot \underline{E}$$

Zerlegung der Stromdichte: $\underline{j} = \underline{j}_\ell + \underline{j}_t$

$$\text{mit } \underline{\nabla} \times \underline{j}_\ell = 0, \quad \underline{\nabla} \cdot \underline{j}_t = 0$$

$$\text{Mit } \underbrace{\frac{\partial \rho}{\partial t}}_{\epsilon_0 \underline{\nabla} \cdot \underline{E}_\ell} + \underbrace{\underline{\nabla} \cdot \underline{j}_\ell}_{0} + \underbrace{\underline{\nabla} \cdot \underline{j}_t}_{0} = 0 \quad \text{folgt}$$

$$\underline{\nabla} \cdot \left(\underline{j}_\ell + \epsilon_0 \frac{\partial \underline{E}_\ell}{\partial t} \right) = 0$$

anwenden
nach Def.

$$\underline{\nabla} \times \left(\underline{j}_\ell + \epsilon_0 \frac{\partial \underline{E}_\ell}{\partial t} \right) = 0$$

$$\Rightarrow \underline{j}_\ell + \epsilon_0 \frac{\partial \underline{E}_\ell}{\partial t} = \text{const.} = 0$$

$$\underline{j}_\ell = \epsilon_0 \underline{\nabla} \frac{\partial \phi}{\partial t}$$

Die Feldgl. $\Delta\phi + \frac{\partial}{\partial t} \underbrace{\nabla \cdot \underline{A}}_0 = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho$

$$\underbrace{\Delta \underline{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \underline{A}}{\partial t^2}}_{\square \underline{A}} - \underbrace{\nabla (\nabla \cdot \underline{A})}_0 - \underbrace{\mu_0 \epsilon_0 \nabla \frac{\partial \phi}{\partial t}}_{\underline{d}} = -\mu_0 \underline{j}$$

$$\Delta \phi = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho$$

$$\square \underline{A} = -\mu_0 \underline{j}_{-t}$$

\Rightarrow longit. Felder \triangleq El. statik

\Rightarrow transv. Felder \triangleq el. magn. Wellen

Coulomb-Eichung ist zweckmäßiger bei Strahlungsproblemen!

Poisson-Gl. für ϕ (long. Felder)

Wellen-Gl. für \underline{A} (transv. Felder)

4. Elektromagn. Wellen

4.1 Freie Wellenausbreitung im Vakuum

$$\rho = 0, \quad \underline{j} = 0$$

$$\square \phi = 0$$

$$\square \underline{A} = 0$$

homog. Wellengl. (Lorentz-Eich.)

$$\underline{E} = -\dot{\underline{A}} - \nabla \phi, \quad \underline{B} = \nabla \times \underline{A}$$

$$\square \underline{E} = 0$$

$$\square \underline{B} = 0$$

Allgem. Lösung von $\square u(x,t) = 0$

$$u(x,t) = F(kx - \omega t)$$

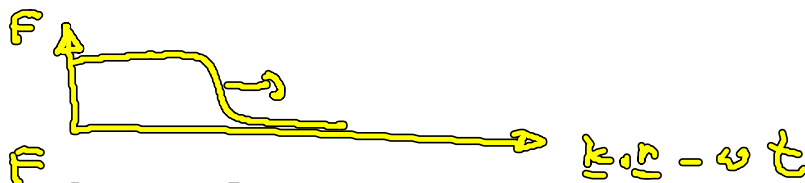
mit bel. 2x diff. baren Fkt. $F(\varphi)$

und $\omega = c|k|$ d' Alembert'sche Lösung

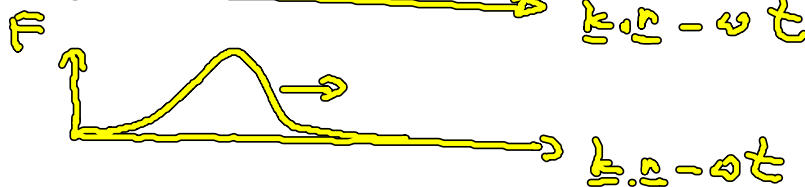
Beweis: $\square F = \left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\right) F''(\varphi) = 0$

F muß nicht periodisch in φ sein,

z.B. solitäre Wellen;



Front „kick“

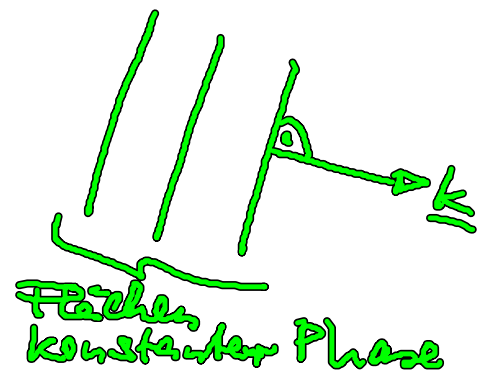


Puls „Dumme“

k Wellenvektor

\omega Frequenz

\varphi Phase



ebene Welle: $kx - \omega t = \varphi = \text{const}$
 $v(t) = \frac{1}{k} \frac{d}{dt} (k(\omega t + \varphi))$

Phasengeschw. $v_{ph} = \frac{dx}{dt} \Big|_{\varphi = \text{const.}} = \frac{k}{k^2} \omega = c \frac{k}{\omega} = \underline{c}$

