

Freie Wellengln. $\square \phi = 0$
 $\square \underline{A} = 0$

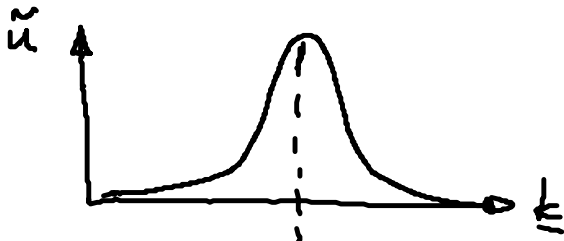
Spezielle Lösung: harmonische ebene Welle

$$u(\underline{r}, t) = \underbrace{\tilde{u}(\underline{k})}_{\text{komplexe Amplitude}} e^{i(\underline{k} \cdot \underline{r} - \omega t)} \quad \omega = c|\underline{k}|$$

Lineare Superposition (für allg. Dispersionsrel. $\omega(\underline{k})$):

$$u(\underline{r}, t) = \int d^3k \tilde{u}(\underline{k}) e^{i(\underline{k} \cdot \underline{r} - \omega(\underline{k})t)}$$

Sei $\tilde{u}(\underline{k})$ um \underline{k}_0 lokalisiert:



\Rightarrow Wellenpaket

Taylor-Entwicklung der Phase um \underline{k}_0

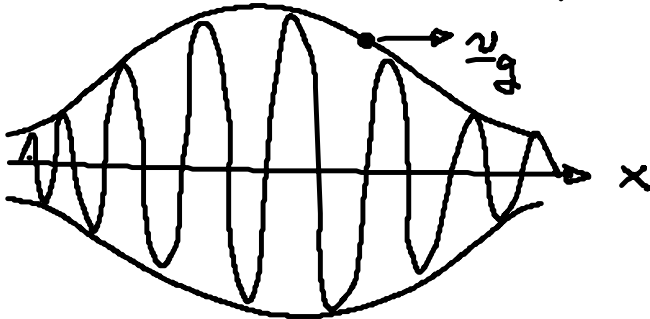
$$\begin{aligned} \omega(\underline{k}) &\approx \underbrace{\omega(\underline{k}_0)}_{\omega_0} + \underbrace{(\underline{k} - \underline{k}_0)}_{\tilde{\underline{k}}} \underbrace{\left. \nabla_{\underline{k}} \omega(\underline{k}) \right|_{\underline{k} = \underline{k}_0}}_{\tilde{v}_g} + \dots \\ &= \omega_0 + (\underline{k} - \underline{k}_0) \cdot \tilde{v}_g \end{aligned}$$

ergibt

$$u(\underline{r}, t) = e^{i(\underline{k}_0 \cdot \underline{r} - \omega_0 t)} \int d^3\tilde{k} \tilde{u}(\underline{k}_0 + \tilde{\underline{k}}) e^{i\tilde{\underline{k}} \cdot (\underline{r} - \tilde{v}_g t)}$$

Trägerwelle
mit Phasen-
geschw. ω_0
 $v_{ph} = \frac{\omega_0}{k_0}$

Einhüllende, Max.
bewegt sich mit
Gruppengeschw.,
 $\underline{v}_g = \nabla_k \omega(k)$



Dispersionsrelation $\omega(k)$:

el. magn. Welle im Vakuum $\omega(k) = c|k|$

$$\Rightarrow \underline{v}_g = c \frac{k}{|k|} = \underline{v}_{ph} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \underline{n}$$

keine Dispersion (d. h. kein Zerfließen)!

(im Gegensatz zu el. magn. in dispersiven Medien)
oder qu. Materiewellen im Vakuum $\omega = \frac{\hbar k^2}{2m}$)

Polarisation

Betrachte el. magn. Welle $\underline{E}(\underline{r}, t) = \underline{E}_0 e^{i(\underline{k} \cdot \underline{r} - \omega t)}$
 $\underline{B}(\underline{r}, t) = \underline{B}_0 e^{i(\underline{k} \cdot \underline{r} - \omega t)}$

\underline{E} heißt transversal, falls $\nabla \cdot \underline{E} = 0$ (quellenfrei)
 $\Rightarrow i \underline{k} \cdot \underline{E} = 0 \Rightarrow \underline{E} \perp \underline{k}$

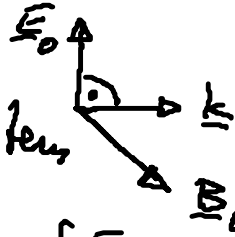
\underline{E} heißt longitudinal, falls $\nabla \times \underline{E} = 0$ (wirbelfrei)
 $\Rightarrow i \underline{k} \times \underline{E} = 0 \Rightarrow \underline{E} \parallel \underline{k}$

$\nabla \cdot \underline{E} = 0$ ist wegen $\nabla \cdot \underline{E} = 0$: $\underline{E}(r, t)$ transversal
 stets wegen $\nabla \cdot \underline{B} = 0$: $\underline{B}(r, t)$ transversal

Weiter folgt aus $\nabla \times \underline{E} + \dot{\underline{B}} = 0$

$$(i\underline{k} \times \underline{E}_0 - i\omega \underline{B}_0) e^{i(\underline{k} \cdot \underline{r} - \omega t)} = 0 \Rightarrow \underline{B}_0 = \frac{1}{c} \underline{n} \times \underline{E}_0$$

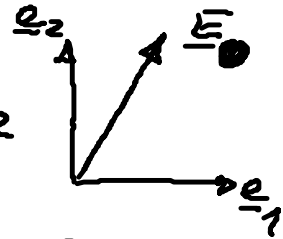
$\underline{k}, \underline{E}_0, \underline{B}_0$: Rechtssystem



Die Richtung von $\text{Re}\{\underline{E}_0, \underline{B}_0\}$ legt die Polarisation fest:

Sei $\underline{k} \parallel \underline{e}_3$ -Achse, $\underline{E}_0 = E_{01} \underline{e}_1 + E_{02} \underline{e}_2$

mit $E_{0i} = a_i e^{i\delta_i} \in \mathbb{C}$



Phys. Feld: $E_1(r, t) = \text{Re}\{a_1 e^{i(\delta_1 + \underline{k} \cdot \underline{r} - \omega t)}\}$

$$= a_1 \cos(\varphi + \delta_1)$$

$$E_2(r, t) = a_2 \cos(\varphi + \delta_2)$$

$$\text{Aus } \frac{E_1}{a_1} = \cos \varphi \cos \delta_1 - \sin \varphi \sin \delta_1$$

$$\frac{E_2}{a_2} = \cos \varphi \cos \delta_2 - \sin \varphi \sin \delta_2$$

läßt sich φ (und somit r, t) eliminieren

$$\frac{E_1}{a_1} \sin \delta_2 - \frac{E_2}{a_2} \sin \delta_1 = \cos \varphi \sin(\delta_2 - \delta_1) \quad (1)$$

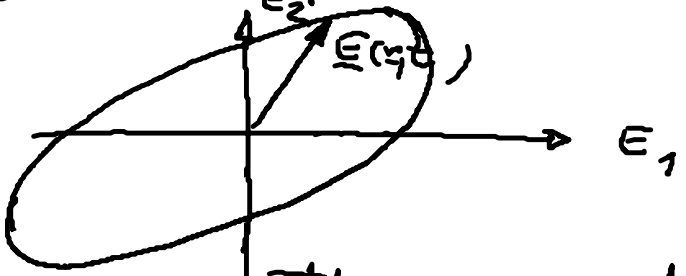
$$\frac{E_1}{a_1} \cos \delta_2 - \frac{E_2}{a_2} \cos \delta_1 = \sin \varphi \sin(\delta_2 - \delta_1) \quad (2)$$

$(1)^2 + (2)^2$

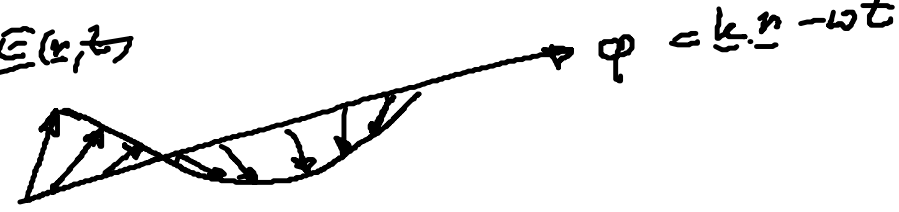


$$\left(\frac{E_1}{a_1}\right)^2 + \left(\frac{E_2}{a_2}\right)^2 - 2 \frac{E_1}{a_1} \frac{E_2}{a_2} \cos \delta = \sin^2 \delta$$

Ellipsengl. für E_1, E_2



\underline{E} läuft als Fkt. von φ auf einer Ellipse \perp \underline{u}_m : elliptische Polarisation



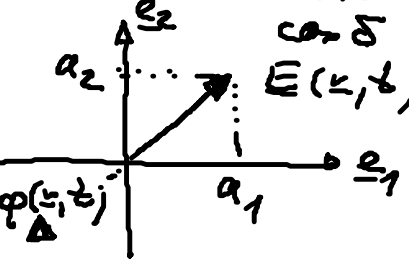
Spezialfälle

(a) linear polarisierte Welle : $\delta_1 = \delta_2 + n\pi$

$$\frac{E_1}{a_1} \pm \frac{E_2}{a_2} = 0$$

$$\sin \delta = 0$$

$$\cos \delta = \pm 1$$



gerade : $\underline{E}(x, t) = \underline{E}_0 \cos \varphi(x, t)$
reell

(b) zirkular polarisierte Welle : $a_1 = a_2 \equiv a$

$$\boxed{E_1^2 + E_2^2 = a^2}$$

$$\delta_1 - \delta_2 = (2n+1)\frac{\pi}{2}$$

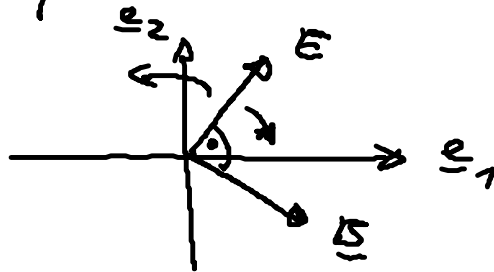
$$\cos \delta = 0$$

$$\sin \delta = \pm 1$$

\underline{E} läuft auf Kreis um

$$\underline{E}(z, t) = a \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \pm \sin \varphi \end{pmatrix} \triangleq \text{Überlagerung zweier um } \frac{\pi}{2} \text{ phasenverschob. lin. polaris. Wellen}$$

links- / rechts-zirkular polarisiert



Energiedichte der el. magn. Welle :

Sei \underline{E}_0 well $\Rightarrow \underline{E}(z, t) = E_0 \cos(kz - \omega t)$

$$\underline{B}(z, t) = B_0 \cos(kz - \omega t)$$

Energiedichte $w = \frac{\epsilon_0}{2} \underline{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0} \underline{B}^2$

$$= \frac{\epsilon_0}{2} \underline{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0} \left(\frac{1}{c} \underline{n} \times \underline{E}_0 \right)^2$$

$$= \frac{\epsilon_0}{2} \underline{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0} \frac{1}{c^2} \underline{E}^2 \quad c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$$

$$= 2 \cdot \frac{\epsilon_0}{2} \underline{E}^2$$

Energiestromdichte : $\underline{S} = \frac{1}{\mu_0} \underline{E} \times \underline{B}$

$$= \frac{1}{\mu_0} \underline{E} \times (\underline{n} \times \underline{E})$$

$$= \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E^2 \underline{n}$$

$$= c \underbrace{\epsilon_0 E^2}_{w} \underline{n}$$

$$\underline{a} \times (\underline{b} \times \underline{c}) = \underline{b} (\underline{a} \cdot \underline{c}) - \underline{c} (\underline{a} \cdot \underline{b})$$

Eng. ∴ Die Energie wird mit der Lichtgeschw. $= c \omega \underline{n}$
 in Richtung $\underline{n} = \underline{k} / |\underline{k}|$ transportiert.

Kugelwellen: $\underline{E}(r, t) = \frac{1}{r} \underline{E}_0 e^{i(kr - \omega t)}$

Energie in Kugelschale mit Radius r und Dicke dr :

$$W(r) = 4\pi r^2 dr \cdot \epsilon_0 \underline{E}^2 = 4\pi \textcircled{2} dr \cdot \epsilon_0 \frac{\underline{E}_0^2}{\textcircled{4\pi}} \frac{1}{r^2} = \text{const.}$$

Raum-/Zeitmittel
 über $\exp\{z\}$
 $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi d\varphi = \frac{1}{2}$ \uparrow ~~das~~

4.2 Retardierte Potentiale

Aufgabe: Lösung der inhomog. Wellengl.

$$\square \phi = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho$$

$$\square \underline{A} = -\mu_0 \underline{j}$$

(Lorenz-Eichung)

zu vorgegeben erzeugenden Quellen $\rho(\underline{r}, t), \underline{j}(\underline{r}, t)$
 und Randbed. $\phi, \underline{A} \rightarrow 0$ für $r \rightarrow \infty$