4.2 Retardierte Potenziale

Aufgabe: Lösung der inhomog. Wellenglн.

$$\boxed{\begin{aligned} \Box \phi &= -\frac{1}{\epsilon_0}\rho \\ \Box \underline{A} &= -\mu_0 \underline{j} \end{aligned}}$$

(Lorenz-Eichung)

zu vorgeg. erzeugenden Quellen $\rho(\underline{r},t)$, $\underline{j}(\underline{r},t)$
und Randbed. $\phi, \underline{A} \to 0$ für $r \to \infty$.

Methode: Green'sche Fkt. $G(\underline{r}-\underline{r}', t-t')$

vgl. El.statik

$$\Delta\phi(\underline{r}) = -\frac{1}{\epsilon_0}\rho(\underline{r})$$

$$\boxed{\Box u(\underline{r},t) = -f(\underline{r},t)}$$

Fourier-Trafo $\Downarrow$ mit $u := \begin{cases} \phi \\ \underline{A} \end{cases}$

$\hat{\Box}^{-1} = -\hat{G}$

$f := \begin{cases} \rho/\epsilon_0 \\ \mu_0 \underline{j} \end{cases}$

$$\boxed{\hat{u}(\underline{k},\omega) = \hat{G}\cdot\hat{f}(\underline{k},\omega)}$$

$$\hat{\phi}(\underline{k}) = \hat{G}\,\hat{\rho}\ , \quad \hat{G} = \frac{1}{\epsilon_0 k^2}$$

Rück-Trafo $\Downarrow$

$\Downarrow$

$$\boxed{\begin{aligned} u(\underline{r},t) &= \int_{\mathbb{R}^3} d^3r' \int_{-\infty}^{\infty} dt'\, G(\underline{r}-\underline{r}', t-t')\, f(\underline{r}', t') \\ \text{mit } \Box G(\underline{r}-\underline{r}', t-t') &= -\delta(\underline{r}-\underline{r}')\,\delta(t-t') \end{aligned}}$$

$$\phi(\underline{r}) = \int d^3r'\, G(\underline{r}-\underline{r}')\, \rho(\underline{r}')$$

$$\text{mit } G(\underline{r}-\underline{r}') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|}$$

$$\Delta G(\underline{r}-\underline{r}') = -\frac{1}{\epsilon_0}\delta(\underline{r}-\underline{r}')$$

Kausalitätsbed.: $G(\underline{r}-\underline{r}', t-t') \overset{!}{=} 0$ für $t' > t$

damit $u(\underline{r},t)$ nur von $f(\underline{r}',t')$ mit $t' < t$ beeinflusst wird.

Fourier-Trafo:

$$f(\underline{r},t) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}^3} d^3q \int_{-\infty}^{\infty} d\omega\, \hat{f}(\underline{q},\omega)\, e^{i(\underline{q}\underline{r}-\omega t)}$$

$$\hat{f}(\underline{q},\omega) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}^3} d^3r \int_{-\infty}^{\infty} dt\, f(\underline{r},t)\, e^{-i(\underline{q}\cdot\underline{r}-\omega t)}$$

Ebenso:

$$u(\underline{r},t) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}^3} d^3q \int_{-\infty}^{\infty} d\omega\, \hat{u}(\underline{q},\omega)\, e^{i(\underline{q}\cdot\underline{r}-\omega t)}$$

$$\Rightarrow \Box u(\underline{r},t) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}^3} d^3q \int_{-\infty}^{\infty} d\omega\, \underbrace{\hat{u}(\underline{q},\omega)}\, \underbrace{\Box e^{i(\underline{q}\cdot\underline{r}-\omega t)}}_{\underbrace{-(q^2-\frac{\omega^2}{c^2})}\, e^{i(\underline{q}\cdot\underline{r}-\omega t)}}$$

$$\overset{!}{=} -\frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}^3} d^3q \int_{-\infty}^{\infty} d\omega\, \underbrace{\hat{f}(\underline{q},\omega)}\, e^{i(\underline{q}\cdot\underline{r}-\omega t)}$$

$$\Rightarrow \left(q^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\right)\hat{u}(\underline{q},\omega) = \hat{f}(\underline{q},\omega)$$

$$\Rightarrow \boxed{\hat{u}(\underline{q},\omega) = \frac{\hat{f}(\underline{q},\omega)}{q^2 - \frac{\omega^2}{c^2}}}$$

$$\hat{G} = \frac{1}{q^2 - \frac{\omega^2}{c^2}}$$

Rücktrafo:

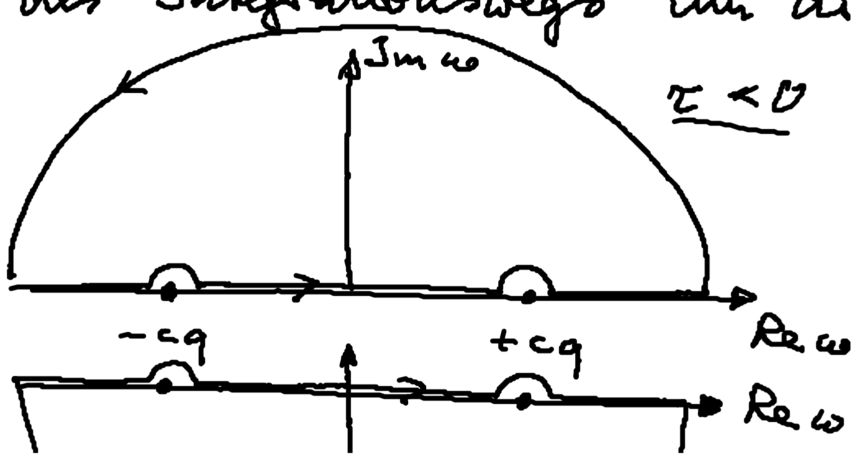
$$u(\underline{r},t) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int_{\mathbb{R}^3} d^3q \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \, \frac{e^{i(\underline{q}\underline{r}-\omega t)}}{q^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} \int_{\mathbb{R}^3} d^3r' \int_{-\infty}^{\infty} dt' f(\underline{r}',t') e^{-i(\underline{q}\underline{r}'-\omega t')}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^3} d^3r' \int_{-\infty}^{\infty} dt' \underbrace{\left\{ \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{\mathbb{R}^3} d^3q \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \, \frac{e^{i\underline{q}(\underline{r}-\underline{r}')-i\omega(t-t')}}{q^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} \right\}}_{G(\underline{r}-\underline{r}',\, t-t')} f(\underline{r}',t')$$

Berechnung der green'schen Fkt. durch komplexe Integr.

Integrand hat Pole bei $\omega = \pm cq$!

green'sche Fkt. wird eindeutig durch Festlegung des Integrationswegs um die Pole herum:

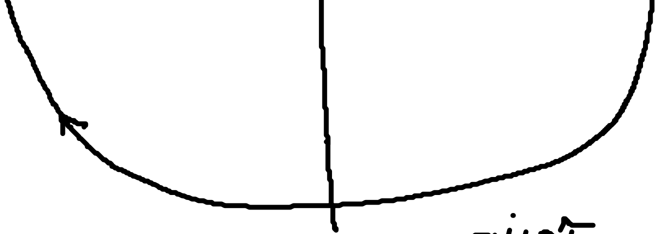


Integral über Halbkreis:

$\omega = Re^{i\varphi}, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi$

$d\omega = Re^{i\varphi} i\, d\varphi \qquad R \to \infty$

$$\left|e^{-i\omega\tau}\right| = e^{\underbrace{R(\sin\varphi)}_{>0}\underbrace{\tau}_{\tau<0}} \to 0$$



$\underline{\tau > 0}$: $\pi \leq \varphi \leq 2\pi$ $\qquad R \to \infty$

$$|e^{-i\omega\tau}| = e^{R\underbrace{(\sin\varphi)}_{<0}\underbrace{\tau}_{>0}} \to 0$$

$$\Gamma(\underline{q},\tau) := \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \, \frac{e^{-i\omega\tau}}{q^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} = \oint_C d\omega \, \frac{e^{-i\omega\tau}}{q^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} = 2\pi i \sum_{\text{Pole}} \text{Res}$$

$\underline{\tau < 0}$: keine Pole im Inneren von C

$$\Rightarrow \Gamma(\underline{q},\tau) = 0 \Rightarrow \boxed{G(\underbrace{\underline{r}-\underline{r}'}_{\underline{s}}, \underbrace{t-t'}_{\tau}) = 0 \text{ für } t < t'}$$

Dies ist die Kausalitätsbed.

$$\underline{\tau > 0} : \Gamma(\underline{q},\tau) = -2\pi i \sum_{\omega = \pm cq} \text{Res} \, \frac{e^{-i\omega\tau}}{\left(-\frac{1}{c^2}\right)(\omega - cq)(\omega + cq)}$$

$\ominus$, da $\oint dz \, f(z) = 2\pi i \sum \text{Res} \, f(z)$

Umlauf im math. pos. Sinn!

(hier $\circlearrowright$!)

$$\Gamma(\underline{q},\tau) = 2\pi i c^2 \left(\frac{e^{-icq\tau}}{2cq} + \frac{e^{+icq\tau}}{-2cq} \right)$$

$$G(\underline{s},\tau) = \frac{c}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} d^3q \, e^{i\underline{q}\underline{s}} \left(\frac{e^{-icq\tau} - e^{icq\tau}}{-2iq} \right)$$

Auswertung in Kugelkoord.: $d^3q = q^2 dq \underbrace{\sin\vartheta\, d\vartheta}_{d(\cos\vartheta)} d\varphi$

$\underline{q}\,\underline{s} = qs\cos\vartheta$

$$G(\underline{s},\tau) = \frac{c}{(2\pi)^3}\int_0^\infty dq\, q \frac{e^{-icq\tau} - e^{icq\tau}}{-2i}\underbrace{\int_{-1}^{1} d(\cos\vartheta)\, e^{iqs\cos\vartheta}}_{\frac{e^{iqs}-e^{-iqs}}{iqs}}\underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi}_{2\pi}$$

$\xi := cq$

$$= \frac{1}{2(2\pi)^2 s}\int_0^\infty d\xi\, \Big\{ \underbrace{e^{i(\tau-\frac{s}{c})\xi} + e^{-i(\tau-\frac{s}{c})\xi}}_{\circledast} \underbrace{- e^{i(\tau+\frac{s}{c})\xi} - e^{-i(\tau+\frac{s}{c})\xi}}_{\circledast} \Big\}$$

Fourier: $\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dk\, e^{ikx} = \delta(x)$ $\circledast$

$$= \frac{1}{4\pi s}\Big\{\delta\big(\tau - \tfrac{s}{c}\big) - \underbrace{\delta\big(\tau + \tfrac{s}{c}\big)}_{=0 \text{ für } \tau > 0}\Big\}$$

Erg.:

$$\boxed{G(\underline{r}-\underline{r}', t-t') = \begin{cases} \frac{1}{4\pi|\underline{r}-\underline{r}'|}\,\delta\Big(t-t'-\frac{|\underline{r}-\underline{r}'|}{c}\Big) & t>t' \\ 0 & t<t' \end{cases}}$$

<u>retardierte Green'sche Fkt.</u> (kausal)

Phys. Interpretation

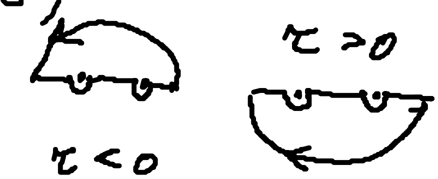
$G(\underline{r}-\underline{r}', t-t')$ ist das Pot. $\phi(\underline{r},t)$, das von einer punktförmigen Ladungsdichte $\rho/\epsilon_0 = \delta(\underline{r}-\underline{r}')\delta(t-t')$,

Eigenschaften: (i) Kausalität

(ii) Ausbreitung der Pkt.störung als Kugelwellenfront mit Phasengeschw. c:

$$|\underline{r}-\underline{r}'| = c(t-t')$$

NB: Für den Integrationsweg



erhält man die avancierte Greenfkt. ($=0$ für $t>t'$), die eine einlaufende Kugelwellenfront beschreibt, welche sich auf den Pkt. $\underline{r}'$ zur Zeit t' zusammenzieht.

Mit
$$u(\underline{r},t) = \int d^3r' \int_{-\infty}^{t} dt' \, \frac{\delta\left(t-t'-\frac{|\underline{r}-\underline{r}'|}{c}\right)}{4\pi|\underline{r}-\underline{r}'|} f(\underline{r}',t')$$

$$= \int_{\mathbb{R}^3} d^3r' \, \frac{f\left(\underline{r}', t-\frac{|\underline{r}-\underline{r}'|}{c}\right)}{4\pi|\underline{r}-\underline{r}'|}$$

folgt:

Ret. Potenziale für bel. $\rho(\underline{r},t)$, $\underline{j}(\underline{r},t)$:

$$\boxed{\begin{aligned}
\phi(\underline{r},t) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{\mathbb{R}^3} d^3r' \, \frac{\rho\left(\underline{r}', t-\frac{|\underline{r}-\underline{r}'|}{c}\right)}{|\underline{r}-\underline{r}'|} \\
\underline{A}(\underline{r},t) &= \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^3} d^3r' \, \frac{\underline{j}\left(\underline{r}', t-\frac{|\underline{r}-\underline{r}'|}{c}\right)}{|\underline{r}-\underline{r}'|}
\end{aligned}}$$

Φ, $\underline{A}$ sind bestimmt durch $\underline{r}'$ zu retardierten Zeiten $t' = t - \frac{|\underline{r} - \underline{r}'|}{c}$

$\Rightarrow$ endl. Ausbreitungsgeschw. der el.magn. Wirkungen oder Felder mit c