4.3 Multipolstrahlung

Ziel: Die retardierten Potenziale sollen für räumlich lokalisierte zeitabh. Ladungs- und Stromverteilungen analog zu den statischen Multipolentwicklungen (§ 1.4, § 2.4) für $r \gg r'$ entwickelt werden.

Voraus.: Lorenz-Eichung $\dot{\phi} + c^2 \underline{\nabla} \cdot \underline{A} = 0$

$\Rightarrow$ Aus $\underline{A}(\underline{r},t) \Longrightarrow \phi(\underline{r},t),\ \underline{E}(\underline{r},t),\ \underline{B}(\underline{r},t)$

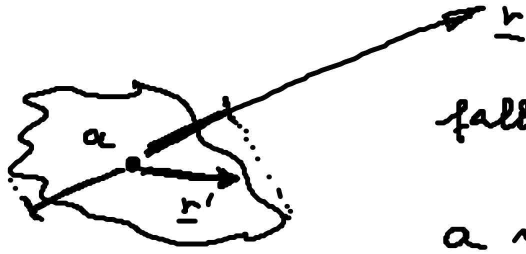
1. Näherung: $\boxed{r \gg a}$ (Ausdehnung der Quelle)

Mit $\dfrac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|} = \dfrac{1}{r} + \dfrac{1}{r^3}(\underline{r}\cdot\underline{r}') + \ldots$

$$\underline{A}(\underline{r},t) \approx \frac{\mu_0}{4\pi r} \int_{\mathbb{R}^3} d^3r'\, \underline{j}\left(\underline{r}', t - \frac{|\underline{r}-\underline{r}'|}{c}\right) + \frac{\mu_0}{4\pi r^3} \int_{\mathbb{R}^3} d^3r' (\underline{r}\cdot\underline{r}')\, \underline{j}\Big(\underline{r}', \overbrace{\quad}^{t - \frac{|\underline{r}-\underline{r}'|}{c}}\Big)$$

2. Näherung: $t - \dfrac{|\underline{r}-\underline{r}'|}{c} \approx \underbrace{t - \dfrac{r}{c}} + \dfrac{\underline{r}\cdot\underline{r}'}{c\,r} + \ldots$

$=: \tau$



falls $\tau \gg \frac{\underline{r}\cdot\underline{r}'}{cr} \sim \frac{a}{c}$ (relative Retard. der einzelnen Plätze der Quelle)

$a \sim$ Ausdehnung der Quelle

$\tau \sim$ charakt. Zeit für Änderung von $\underline{j}$

(z.B.: harmon. Erregung $\underline{j} \sim e^{i\omega t}$:

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{ck} = \frac{\lambda}{c}$$

$$\Rightarrow \boxed{a \ll \lambda} \quad \text{Wellenlänge})$$

$$\Rightarrow \underline{j}\left(\underline{r}', t - \frac{|\underline{r}-\underline{r}'|}{c}\right) \approx \underline{j}(\underline{r}', \underbrace{t - \frac{r}{c}}_{\tau}) + \frac{\underline{r}\cdot\underline{r}'}{cr} \frac{\partial \underline{j}(\underline{r}',\tau)}{\partial \tau}$$

$$\Rightarrow \boxed{A(\underline{r},t) \approx \frac{\mu_0}{4\pi r} \int d^3r' \, \underline{j}(\underline{r}',\tau) + \frac{\mu_0}{4\pi r^3} \int d^3r' (\underline{r}\cdot\underline{r}')\left(1 + \frac{r}{c}\frac{\partial}{\partial\tau}\right)\underline{j}(\underline{r}',\tau)}$$

niedrigste Ordnung (verschwindet nicht, da im Gegensatz zu § 2.4 $\underline{\nabla}_{\underline{j}}' \neq 0$)

Mit $\underline{\nabla}_{r'} \left[x_k' \underline{j}\right] = x_k' \underbrace{\underline{\nabla}_{r'} \underline{j}(\underline{r}',\tau)}_{-\dot{\rho}(\underline{r}',\tau)} + j_k$, $\int_{\mathbb{R}^3} d^3r' \, \underline{\nabla}_{r'}(x_k' \underline{j}) \overset{\text{Gauß}}{=} 0$

folgt

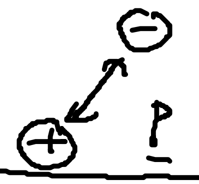
$$\int d^3r' \, \underline{j}(\underline{r}',\tau) = \int d^3r' \, \underline{r}' \dot{\rho}(\underline{r}',\tau) = \dot{\underline{p}}(\tau)$$

mit dem el. Dipolmoment $\underline{p} = \int d^3r' \, \underline{r}' \rho(\underline{r}',\tau)$

$$\boxed{\underline{A}^{(1)}(\underline{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi r} \dot{\underline{p}}\left(t - \frac{r}{c}\right)} \quad \text{El. Dipolstrahlung}$$

Hertz'scher Dipol (H. Hertz 1857 – 1894)

$$\underline{p}(t) = \underline{p}_0\, e^{-i\omega t}$$



$$\boxed{\begin{aligned}\underline{A}^{(1)}(\underline{r},t) &= \frac{-i\omega\mu_0 \underline{p}_0}{4\pi}\,\frac{e^{-i\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)}}{r}\\ &= \frac{-i\omega\mu_0\underline{p}_0}{4\pi}\,\frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r}\end{aligned}}$$

Kugelwelle

$$\frac{\partial}{\partial t}\phi(\underline{r},t) \overset{\text{Lorenz}}{=} \frac{1}{\epsilon_0\mu_0}\,\underline{\nabla}\cdot\underline{A} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\,\underline{\nabla}\left\{\frac{1}{r}\,\underline{\dot{p}}\left(t-\frac{r}{c}\right)\right\}$$

$$\Rightarrow \phi(\underline{r},t) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\,\underline{\nabla}\left\{\frac{1}{r}\,\underline{p}(\underbrace{t-\tfrac{r}{c}}_{\tau})\right\} + \underbrace{\phi_{stat}(\underline{r})}_{0\ (\text{oBdA})}$$

$$\underline{\nabla}\cdot\underline{p} = \frac{\partial}{\partial\tau}\underline{p}\,(\underline{\nabla}\tau)$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left\{\underbrace{\frac{1}{cr^2}\,\underline{r}\cdot\underline{\dot{p}}\left(t-\frac{r}{c}\right)}_{\sim\frac{1}{r}} + \underbrace{\frac{1}{r^3}\,\underline{r}\cdot\underline{p}\left(t-\frac{r}{c}\right)}_{\sim\frac{1}{r^2}}\right\}$$

Grenzfälle:

(i) Fernzone (Wellenzone): $r \gg \lambda\ (\gg a) \Leftrightarrow \boxed{kr \gg 1}$

$$\boxed{\phi(\underline{r},t) \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{1}{cr^2}\,\underline{r}\cdot\underline{\dot{p}}\left(t-\frac{r}{c}\right)}$$

$$\frac{1}{c}\dot{p} \sim \frac{\omega}{c}p \gg \frac{p}{r} \Leftarrow \frac{\omega}{c}r \gg 1$$

(ii) Nahzone (quasistat. Bereich): $\lambda \gg r\ (\gg a) \Leftrightarrow \boxed{kr \ll 1}$

$$\boxed{\phi(\underline{r},t) \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{1}{r^3}\,\underline{r}\cdot\underline{p}(t)}\ \cancel{-\frac{1}{r^3}\frac{r}{c}\,\underline{r}\cdot\underline{\dot{p}}(t)} + \cancel{\frac{1}{cr^2}\,\underline{r}\cdot\underline{\dot{p}}(t)}$$

Retardierung kompensiert $\dot{p}$-Term

instantanes Dipolpot.!

Felder in Fernfeldnäherung

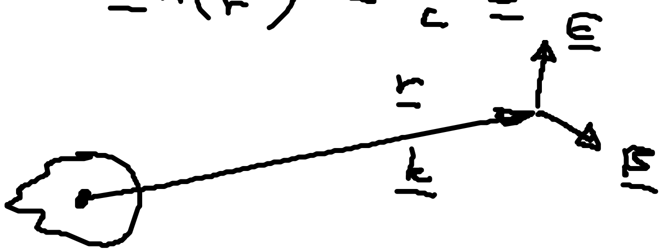
$$\underline{B}(\underline{r},t) = \nabla\times\underline{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\nabla\times\left(\frac{1}{r}\dot{\underline{p}}\left(t-\frac{r}{c}\right)\right)$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi c}\frac{1}{r^2}\left[\ddot{\underline{p}}\left(t-\frac{r}{c}\right)\times\underline{r}\right] + O\left(\frac{1}{r^2}\right)$$

$$\underline{E}(\underline{r},t) = -\nabla\phi - \dot{\underline{A}}(\underline{r},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^2}\frac{1}{r^3}\left[\ddot{\underline{p}}\left(t-\frac{r}{c}\right)\times\underline{r}\right]\times\underline{r} + O\left(\frac{1}{r^2}\right)$$

Es gilt: $\underline{B}\times\left(\frac{\underline{r}}{r}\right) = \frac{1}{c}\underline{E}$

Also



$\underline{r}, \underline{E}, \underline{B}$ bilden Rechtssystem!
$\underline{r}\perp\underline{E}\perp\underline{B}$

Ausbreitung wie eine freie Kugelwelle
(nur in der Fernzone

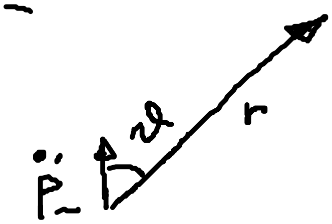
NB: In der Nahzone gilt immer noch $\underline{B}\perp\underline{r}$,
aber $\underline{E}$ hat longitud. Komp. $\underline{E}_\parallel \parallel \underline{r}$
neben $\underline{E}_\perp\perp\underline{r}$

Poynting-Vektor (Energiestromdichte):

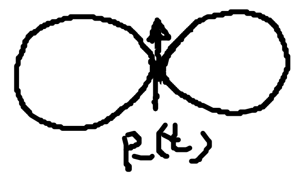
$$\underline{S} = \underline{E}\times\underline{H} = -\frac{1}{\mu_0}\underline{B}\times\underline{E} = -\frac{c}{\mu_0 r}\underline{B}\times(\underline{B}\times\underline{r})$$

$$= -\frac{c}{\mu_0 r}\left\{\underbrace{(\underline{B}\cdot\underline{r})}_{0}\underline{B} - B^2\underline{r}\right\}$$

$$= \frac{\mu_0}{(4\pi)^2 c} \frac{1}{r^4} \underbrace{\left(\ddot{\underline{p}}\left(t-\frac{r}{c}\right) \times \underline{r}\right)^2}_{|\ddot{\underline{p}}|^2 r^2 \sin^2\vartheta} \frac{1}{r}\underline{r}$$



$$\boxed{\underline{S} = \frac{\mu_0}{(4\pi)^2 c} \left|\ddot{\underline{p}}\right|^2 \frac{1}{r^2} \sin^2\vartheta \, \frac{\underline{r}}{r}}$$



$l=1$
$m=0$

Abstrahl-Charakteristik des Hertz'schen Dipols

($\underline{p}(t) = \underline{p}_0 e^{-i\omega t}$: $|\ddot{\underline{p}}|^2 = p_0^2 \omega^4$), stark richtungsabhängig

<u>NB</u>: gute Näherung für lineare Antenne