

Magnetische Dipol-, el. Quadrupolstrahlung

wiedrigste Ordn. der Multipolentw. von $\underline{A}(\underline{r}, t)$
verschwindet für eine quellenfreie Stromdichte

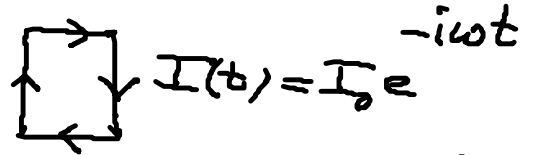
$$\underline{j}(\underline{r}', \tau) : \nabla_{\underline{r}'} \cdot \underline{j}(\underline{r}', \tau) = -\frac{\partial \rho(\underline{r}', \tau)}{\partial \tau} = 0$$

$$\Rightarrow \dot{\underline{p}}(\tau) = \int d^3 r' \underline{r}' \dot{\underline{j}} = 0$$

$$\Rightarrow A^{(1)} = \frac{\mu_0}{4\pi r} \dot{\underline{p}}(\tau) \equiv 0$$

in Hertz'scher Dipolnäherung
keine Ausstrahlung

Beispiel: geschlossene
Leiterschleife
(Rahmenantenne)



2. Ordnung

$$A^{(2)}(\underline{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} \int d^3 r' (\underline{r} \cdot \underline{r}') \left(1 + \frac{r}{c} \frac{\partial}{\partial \tau} \right) \underline{j}(\underline{r}', \tau) \quad \overset{t - \frac{r}{c}}{\parallel}$$

Hilfsformeln:

$$\underline{(\underline{r} \cdot \underline{r}') \underline{j}(\underline{r}', \tau)} = \frac{1}{2} (\underline{r}' \times \underline{j}) \times \underline{r} + \frac{1}{2} [(\underline{r} \cdot \underline{r}') \underline{j} + (\underline{r} \underline{j}') \underline{r}']$$

$$\nabla_{\underline{r}'} \cdot \{ x'_k (\underline{r} \cdot \underline{r}') \underline{j} \} = [(\underline{r} \cdot \underline{r}') j'_k + x'_k (\underline{r} \underline{j}')_k] + x'_k (\underline{r} \cdot \underline{r}') \nabla_{\underline{r}'} \cdot \underline{j}$$

$\nabla_{\underline{r}'} \cdot \underline{j} = -\frac{\partial \rho(\underline{r}')}{\partial \tau}$

integriert:

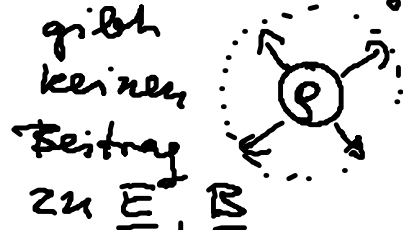
$$\int_{\mathbb{R}^3} d^3 r' \nabla_{\underline{r}'} \cdot \{ x'_k (\underline{r} \cdot \underline{r}') \underline{j} \} = \int_{\mathbb{R}^3} d^3 r' [(\underline{r} \cdot \underline{r}') j'_k + (\underline{r} \underline{j}')_k] - \int_{\mathbb{R}^3} d^3 r' (\underline{r} \cdot \underline{r}') \frac{\rho(\underline{r}')}{k}$$

0 (Gauß'scher Satz)

$$\Rightarrow \int d^3r' (\underline{r}, \underline{r}') \underline{j}(\underline{r}', \underline{r}) = \underbrace{\left[\frac{1}{2} \int d^3r' (\underline{r}' \times \underline{j}(\underline{r}', \underline{r})) \right]}_{\underline{m}(\underline{r}) \text{ magn. Dipolmoment}} \times \underline{n} + \underbrace{\frac{1}{2} \int d^3r' (\underline{r}\underline{r}') \rho(\underline{r}', \underline{r})}_{\text{el. Quadrupolmoment}}$$

$$\underline{Q}(\underline{r}) = \int d^3r' \rho(\underline{r}', \underline{r}) (3 \underline{r}' \otimes \underline{r}' - r'^2 \underline{1}) \Rightarrow \text{Sp } \underline{Q} = 0$$

↓ breathing mode



$$\underline{Q}(\underline{r}) \cdot \underline{r} = \left(\sum_{j=1}^3 Q_{ij} r_j \right) = 3 \int d^3r' \rho(\underline{r}', \underline{r}) \underline{r}'(\underline{r}' \cdot \underline{r})$$

Also

$$\underline{A}^{(2)}(\underline{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} \left(1 + \frac{r}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right) \left[\underline{m}(\underline{r}) \times \underline{r} + \frac{1}{6} \underline{Q}(\underline{r}) \underline{r} \right]$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \left\{ \underbrace{\frac{1}{r^3} \underline{m} \times \underline{r} + \frac{1}{cr^2} \dot{\underline{m}} \times \underline{r}}_{\text{magn. Dipolstrahl.}} + \underbrace{\frac{1}{6r^3} \underline{Q} \underline{r} + \frac{1}{6cr^2} \dot{\underline{Q}} \underline{r}}_{\text{el. Quadrupolstrahl.}} \right\}$$

$$\underline{A}_m^{(2)}(\underline{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\underline{\nabla} \times \frac{1}{r} \underline{m}(t - \frac{r}{c}) \right)$$

magn. Dipolstrahl.

Skalarer Pot. :

$$\frac{\partial}{\partial t} \phi(\underline{r}, t) = -c^2 \underline{\nabla} \cdot \underline{A} = -\frac{\mu_0 c^2}{4\pi} \underline{\nabla} \cdot \left(\underline{\nabla} \times \frac{1}{r} \underline{m} \right) = 0$$

$$\Rightarrow \phi(\underline{r}, t) = \phi(\underline{r}) = 0 \quad (\text{obdA kein stat. Pot.})$$

Felder in Fernfeldnäherung

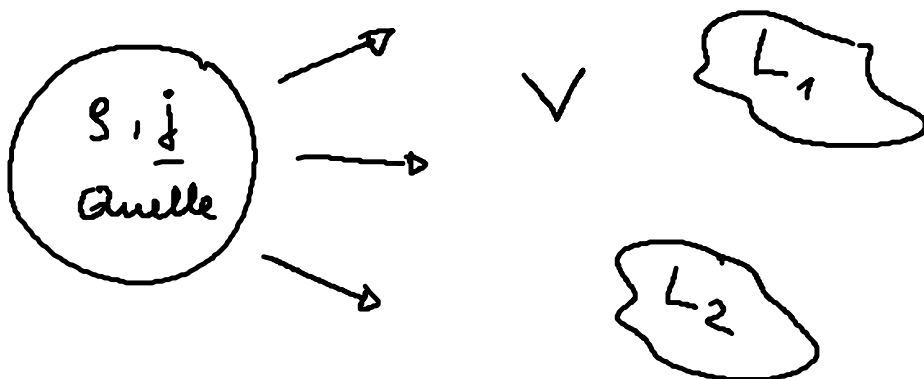
$$\underline{B}_m(\underline{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi c^2 r^3} [\ddot{\underline{m}}(t - \frac{r}{c}) \times \underline{r}] \times \underline{r} \quad (r \gg \lambda \gg a)$$

$$\underline{B}_{elQ}(\underline{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi c^2 r^3} \left[\frac{1}{6} \ddot{\underline{Q}}(t - \frac{r}{c}) \cdot \underline{r} \right] \times \underline{r} \quad (-''-)$$

$$\underline{E} = c (\underline{B} \times \frac{\underline{r}}{r}) \quad \text{wie für el. Dipolstrahlung}$$

4.4 Wellenoptik und Beugung

Problem : Ausbreitung el. magn. Wellen bei
geg. , lokalisierten Quellen $\underline{g}(\underline{r}, t)$ u. $\underline{j}(\underline{r}, t)$
und vorgeg. Leiter L_1 im Vakuum



Ziel : Berechnung des Wellenfeldes im Außenraum V

Anwendung : Radiowellen ($\lambda \sim 1 - 10^4 \text{ m}$)

Radar

Optik

($\lambda \sim 400 - 800 \text{ nm}$) \rightarrow Beugung

Zurückführung auf Randwertaufgabe (§ 1.6)

Lösung der inhom. Wellengl.

$$\left. \begin{aligned} \square \phi &= -\frac{1}{\epsilon_0} \rho \\ \square \underline{A} &= -\mu_0 \underline{j} \end{aligned} \right\} \text{Lorenzgleichung}$$

zu vorgeg. $\rho, \underline{j}(\underline{r}, t)$ und Randbed. auf L_∞
sowie Kausalitätsbed. (Ausstrahlbed.)

Annahme: $\rho(\underline{r}, t) = \rho(\underline{r}) e^{-i\omega t}$
 $\underline{j}(\underline{r}, t) = \underline{j}(\underline{r}) e^{-i\omega t}$ } oBdA wegen
 Fourierreuehung

$$\Rightarrow \begin{aligned} \phi(\underline{r}, t) &= \phi(\underline{r}) e^{-i\omega t} \\ \underline{A}(\underline{r}, t) &= \underline{A}(\underline{r}) e^{-i\omega t} \end{aligned}$$

in Wellengl. $(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}) \phi = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho$:

$$\boxed{(\Delta + k^2) \phi(\underline{r}) = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho(\underline{r})} \quad \text{mit} \quad \boxed{k = \frac{\omega}{c}}$$

Green'sche Fkt. der Wellengl. (§4.2) $\square \phi = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho$:

$$\square G(\underline{r}-\underline{r}', t-t') = -\delta(\underline{r}-\underline{r}') \delta(t-t')$$

$$\begin{aligned} \text{allg. L\u00f6s. } \phi(\underline{r}, t) &= \int_{\mathbb{R}^3} d^3r' \int_{-\infty}^t dt' G(\underline{r}-\underline{r}', t-t') \rho(\underline{r}', t') / \epsilon_0 \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} d^3r' \underbrace{\int_{-\infty}^t dt' G(\underline{r}-\underline{r}', t-t') e^{-i\omega t'}}_{\left(\int_0^\infty d\tau G(\underline{r}-\underline{r}', \tau) e^{i\omega \tau} \right) e^{-i\omega t}} \rho(\underline{r}') / \epsilon_0 \\ &=: \tilde{G}(\underline{r}-\underline{r}') \end{aligned}$$

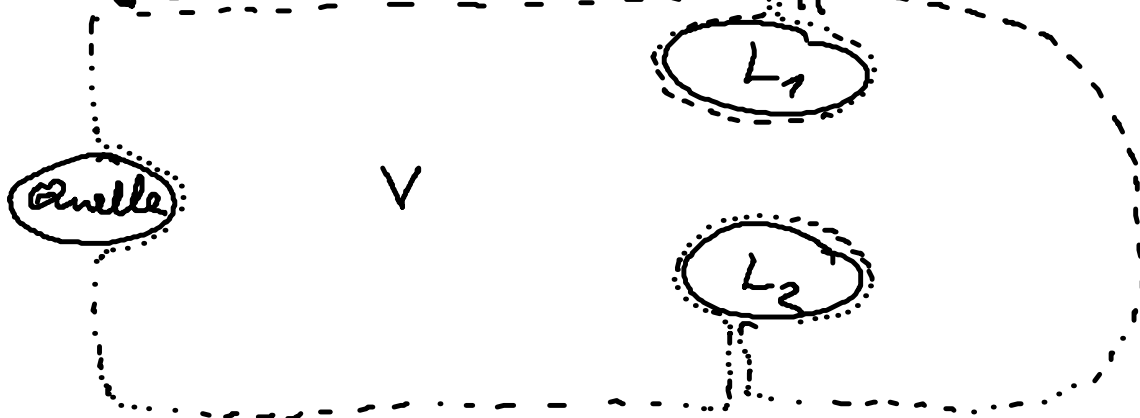
$$\boxed{\begin{aligned} \phi(\underline{r}) &= \int d^3r' \tilde{G}(\underline{r}-\underline{r}') \rho(\underline{r}') / \epsilon_0 \\ (\Delta + k^2) \tilde{G}(\underline{r}-\underline{r}') &= -\delta(\underline{r}-\underline{r}') \end{aligned}}$$

Problem : Randbed. für ϕ , A sind im nicht-stationären Fall nicht bekannt, sondern müssen selbstkonsistent bestimmt werden.

Umformulierung mit Hilfe des Green'schen Satzes:

Skalare Kirchhoff-Identität

(skalare \rightarrow Polarisationseffekte nicht beschreibbar)



Green'scher Satz:
$$\int_{\partial V} d\underline{f} (\varphi \underline{\nabla} \psi - \psi \underline{\nabla} \varphi) = \int_V d^3r (\varphi \Delta \psi - \psi \Delta \varphi)$$

Setze $\psi(\underline{r}) = \tilde{G}(\underline{r} - \underline{r}')$

$\varphi(\underline{r}) = \phi(\underline{r})$ sei Lösung

$$\Rightarrow \int_{\partial V} d\underline{f} (\phi \underline{\nabla} \tilde{G}(\underline{r} - \underline{r}') - \tilde{G}(\underline{r} - \underline{r}') \underline{\nabla} \phi) = \int_V d^3r (\underbrace{\phi \Delta \tilde{G}}_{-\delta - k^2 \tilde{G}} - \underbrace{\tilde{G} \Delta \phi}_{-\frac{\rho}{\epsilon_0} - k^2 \phi})$$

- $\phi(\underline{r}')$

$$\phi(\underline{r}') = \int_{\partial V} d\underline{f} [\tilde{G}(\underline{r} - \underline{r}') \underline{\nabla} \phi - \phi(\underline{r}) \underline{\nabla} \tilde{G}(\underline{r} - \underline{r}')] \quad \underline{r}' \in V$$