Magnetische Dipol-, el. Quadrupolstrahlung

niedrigste Ordn. der Multipolentw. von $\underline{A}(\underline{r},t)$ verschwindet für eine quellenfreie Stromdichte

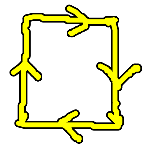
$\dot{\underline{j}}(\underline{r}',\tau)$: $\nabla_{r'} \underline{j}(\underline{r}',\tau) = -\frac{\partial}{\partial \tau}\rho(\underline{r}',\tau) = 0$

$$\Rightarrow \dot{\underline{p}}(\tau) = \int d^3r' \, \underline{v}\rho' = 0$$

$$\Rightarrow A^{(1)} = \frac{\mu_0}{4\pi r}\dot{\underline{p}}(\tau) \equiv 0$$

i. Hertz'schen Dipolnäherung keine Ausstrahlung

Beispiel: geschlossene Leiterschleife (Rahmenantenne)



$I(t) = I_0 e^{-i\omega t}$

2. Ordnung

$$A^{(2)}(\underline{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi r^3}\int d^3r' (\underline{r}\cdot\underline{r}')\left(1 + \underbrace{\frac{r}{c}\frac{\partial}{\partial\tau}}\right)\underline{j}(\underline{r}',\tau)\Big|_{t-\frac{r}{c}}$$

Hilfsformeln:

$$\underbrace{(\underline{r}\cdot\underline{r}')\underline{j}(\underline{r}',\tau)} = \frac{1}{2}(\underline{r}'\times\underline{j})\times\underline{r} + \frac{1}{2}\underbrace{[(\underline{r}\cdot\underline{r}')\underline{j} + (\underline{r}\underline{j})\underline{r}']}$$

$$\nabla_{r'}\{x_k'(\underline{r}\cdot\underline{r}')\underline{j}\} = \underbrace{[(\underline{r}\cdot\underline{r}')j_k + x_k'(\underline{r}\cdot\underline{j})]} + x_k'(\underline{r}\cdot\underline{r}')\underbrace{\nabla_{r'}\underline{j}}_{-\frac{\partial}{\partial\tau}\rho(\underline{r}',\tau)}$$

integriert:

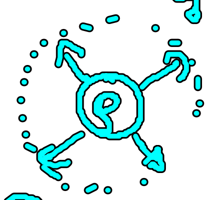
$$\underbrace{\int_{R^3} d^3r' \, \nabla_{r'}\{x_k'(\underline{r}\cdot\underline{r}')\underline{j}\}}_{0 \text{ (gauß'scher Satz)}} = \int_{R^3} d^3r' \underbrace{[(\underline{r}\cdot\underline{r}')\underline{j} + (\underline{r}\underline{j})\underline{r}']_k} - \int d^3r' (\underline{r}\underline{r}')x_k'\dot{\rho}'$$

$$\Rightarrow \int d^3r'(\underline{r}\cdot\underline{r}')\underline{j}(\underline{r}',\tau) = \underbrace{\left[\frac{1}{2}\int d^3r'\left(\underline{r}'\times\underline{j}(\underline{r}',\tau)\right)\right]}_{\underline{m}(\tau)\ \text{magn. Dipolmoment}}\times\underline{n} + \underbrace{\frac{1}{2}\int d^3r'(\underline{r}\cdot\underline{r}')\underline{r}'\dot{\rho}}_{\downarrow\ \text{el. Quadrupolmoment}}$$

$$\underline{\underline{Q}}(\tau) = \int d^3r'\,\rho(\underline{r}',\tau)\left(3\underline{r}'\otimes\underline{r}' - \cancel{r'^2\underline{\underline{1}}}\right) \quad \Rightarrow \operatorname{Sp}\underline{\underline{Q}} = 0$$

↓ breathing mode

gibt keinen Beitrag zu $\underline{E}$, $\underline{B}$



$$\underline{\underline{Q}}(\tau)\cdot\underline{r}\ \left(= \sum_{j=1}^{3} Q_{ij}r_j\right) = 3\int d^3r'\,\rho(\underline{r}',\tau)\,\underline{r}'(\underline{r}'\cdot\underline{r})$$

Also

$$\underline{A}^{(2)}(\underline{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi r^3}\left(1 + \frac{r}{c}\frac{\partial}{\partial\tau}\right)\left[\underline{m}(\tau)\times\underline{r} + \frac{1}{6}\dot{\underline{\underline{Q}}}(\tau)\underline{r}\right]$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\left\{\underbrace{\frac{1}{r^3}\underline{m}\times\underline{r} + \frac{1}{cr^2}\dot{\underline{m}}\times\underline{r}}_{\text{magn. Dipolstrahl.}} + \underbrace{\frac{1}{6r^3}\dot{\underline{\underline{Q}}}\underline{r} + \frac{1}{6cr^2}\ddot{\underline{\underline{Q}}}\underline{r}}_{\text{el. Quadrupolstrahl.}}\right\}$$

↓

$$\boxed{\underline{A}^{(2)}_{m}(\underline{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\left(\underline{\nabla}\times\frac{1}{r}\underline{m}\left(t-\frac{r}{c}\right)\right)}$$

magn. Dipolstrahl.

Skalares Pot.:

$$\frac{\partial}{\partial t}\phi(\underline{r},t) = -c^2\,\underline{\nabla}\cdot\underline{A} = -\frac{\mu_0 c^2}{4\pi}\,\underline{\nabla}\cdot\left(\underline{\nabla}\times\frac{1}{r}\underline{m}\right) \equiv 0$$

$$\Rightarrow \phi(\underline{r},t) = \phi(\underline{r}) = 0 \quad (\text{OBdA kein stat. Pot.})$$

Felder in <u>Fernfeldnäherung</u>

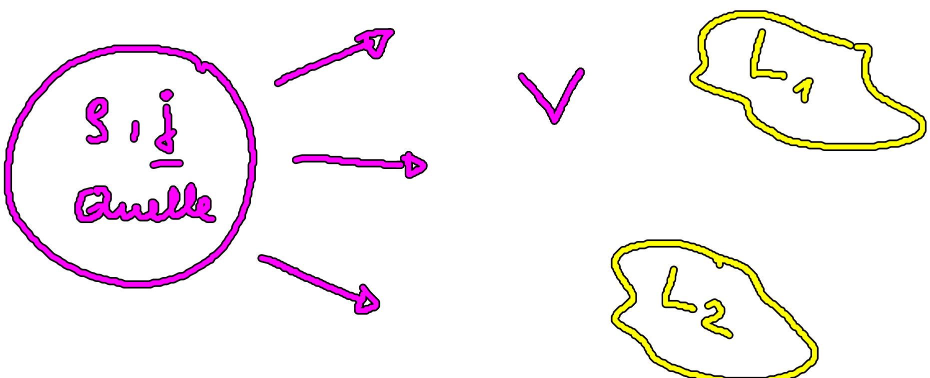
$$\underline{B}_m(\underline{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi c^2 r^3}\left[\underline{\ddot{m}}\left(t-\frac{r}{c}\right)\times\underline{r}\right]\times\underline{r} \qquad (r \gg \lambda \gg a)$$

$$\underline{B}_{el\,Q}(\underline{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi c^2 r^3}\left[\frac{1}{6}\,\dddot{\underline{\underline{Q}}}\left(t-\frac{r}{c}\right)\cdot\underline{r}\right]\times\underline{r} \qquad (\;-\,''\,-\;)$$

$$\underline{E} = c\left(\underline{B}\times\frac{\underline{r}}{r}\right)$$ wie für el. Dipolstrahlung

4.4 Wellenoptik und Beugung

Problem: Ausbreitung el.magn. Wellen bei gegebenen lokalisierten Quellen $\rho(\underline{r},t)$ u. $\underline{j}(\underline{r},t)$ und vorgeg. Leiter L_α im Vakuum



Ziel: Berechnung des Wellenfeldes im Außenraum V

Anwendung: Radiowellen ($\lambda \sim 1 - 10^4$ m)
Radar
Optik ($\lambda \sim 400 - 800$ nm) $\rightarrow$ Beugung

Zurückführung auf Randwertaufgabe (§ 1.6)

Lösung der inhom. Wellengln.

$$\Box\phi = -\frac{1}{\epsilon_0}\rho$$
$$\Box \underline{A} = -\mu_0 \underline{j}$$
} Lorenzeichung

zu vorgeg. ρ, $\underline{j}(\underline{r},t)$ und Randbed. auf L_∞
sowie Kausalitätsbed. (Ausstrahlbed.)

<u>Annahme</u>: $\rho(\underline{r},t) = \rho(\underline{r})e^{-i\omega t}$, $\underline{j}(\underline{r},t) = \underline{j}(\underline{r})e^{-i\omega t}$ } oBdA wegen Fourierzerlegung

$$\Longrightarrow \quad \phi(\underline{r},t) = \phi(\underline{r})e^{-i\omega t}$$
$$\underline{A}(\underline{r},t) = \underline{A}(\underline{r})e^{-i\omega t}$$

in Wellengln. $\left(\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\phi = -\frac{1}{\epsilon_0}\rho$:

$$\boxed{(\Delta + k^2)\phi(\underline{r}) = -\frac{1}{\epsilon_0}\rho(\underline{r})} \quad \text{mit} \quad \boxed{k = \frac{\omega}{c}}$$

green'sche Fkt. der Wellengl. (§4.2) $\Box\phi = -\frac{1}{\epsilon_0}\rho$:

$$\Box G(\underline{r}-\underline{r}', t-t') = -\delta(\underline{r}-\underline{r}')\delta(t-t')$$

allg. Lös. $\phi(\underline{r},t) = \int_{\mathbb{R}^3} d^3r' \int_{-\infty}^{t} dt' \, G(\underline{r}-\underline{r}', t-t')\rho(\underline{r}',t')/\epsilon_0$

$$= \int_{\mathbb{R}^3} d^3r' \underbrace{\int_{-\infty}^{t} dt' \, G(\underline{r}-\underline{r}', \underbrace{t-t'}_{\tau})e^{-i\omega t'}}_{\underbrace{\left(\int_0^\infty d\tau \, G(\underline{r}-\underline{r}',\tau)e^{i\omega\tau}\right)}_{=:\, \tilde{G}(\underline{r}-\underline{r}')} e^{-i\omega t}} \rho(\underline{r}')/\epsilon_0$$

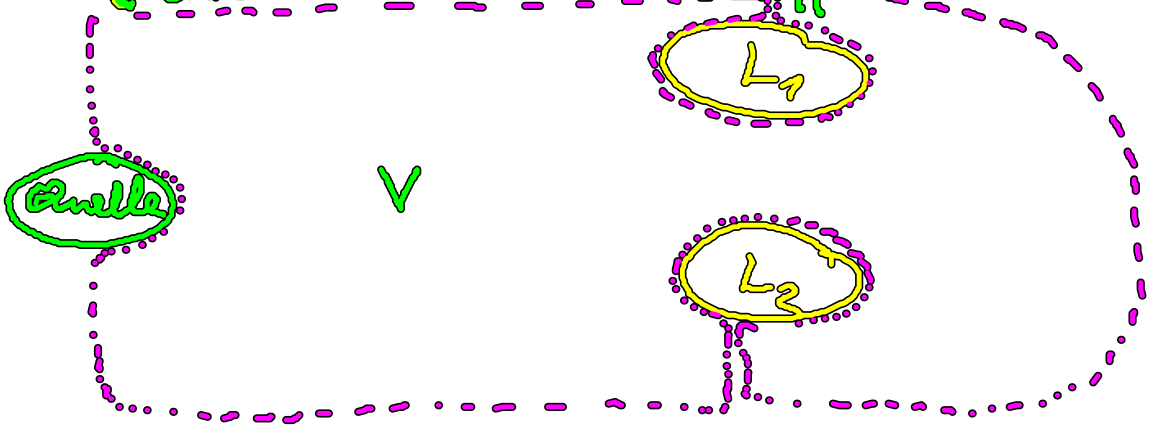
$$\boxed{\begin{aligned} \phi(\underline{r}) &= \int d^3r' \, \tilde{G}(\underline{r}-\underline{r}')\rho(\underline{r}')/\epsilon_0 \\ (\Delta + k^2)\tilde{G}(\underline{r}-\underline{r}') &= -\delta(\underline{r}-\underline{r}') \end{aligned}}$$

Problem: Randbed. für Φ, $\underline{A}$ sind im nicht-stationären Fall nicht bekannt, sondern müssen selbstkonsistent bestimmt werden.

Umformulierung mit Hilfe des Green'schen Satzes:

<u>Skalare Kirchhoff-Identität</u>

(skalar → Polarisationseffekte nicht beschreibbar)



Green'scher Satz: $$\int_{\partial V} d\underline{f}\, (\varphi \underline{\nabla}\psi - \psi \underline{\nabla}\varphi) = \int_V d^3r\, (\varphi \Delta\psi - \psi\Delta\varphi)$$

Setze $\psi(\underline{r}) = \tilde{G}(\underline{r}-\underline{r}')$

$\varphi(\underline{r}) = \Phi(\underline{r})$ sei Lösung

$$\Rightarrow \int_{\partial V} d\underline{f}\, \left(\Phi\, \underline{\nabla}_r \tilde{G}(\underline{r}-\underline{r}') - \tilde{G}(\underline{r}-\underline{r}')\, \underline{\nabla}_r \Phi\right) = \underbrace{\int_V d^3r \left(\Phi \underbrace{\Delta\tilde{G}}_{-\delta - k^2\tilde{G}} - \tilde{G} \underbrace{\Delta\Phi}_{-\cancel{\frac{\rho}{\varepsilon_0}} - k^2\Phi}\right)}_{-\Phi(\underline{r}')}$$

$$\boxed{\Phi(\underline{r}') = \int_{\partial V} d\underline{f} \left[\tilde{G}(\underline{r}-\underline{r}')\, \underline{\nabla}_r \Phi - \Phi(\underline{r})\, \underline{\nabla}_r \tilde{G}(\underline{r}-\underline{r}')\right]} \qquad \underline{r}' \in V$$