

Wellenagl. für  $\varphi(\underline{r}, t) = \varphi(\underline{r}) e^{-i\omega t}$

$$(\Delta + k^2) \tilde{G}(\underline{r}-\underline{r}') = -\delta(\underline{r}-\underline{r}')$$

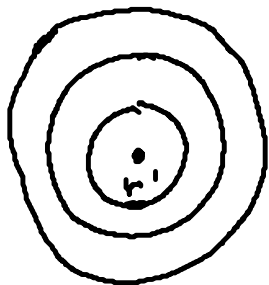
$$\phi(\underline{r}) = \int d^3r' \tilde{G}(\underline{r}-\underline{r}') \varphi(\underline{r}') / \epsilon_0$$

(a) Greenfkt. des unendl. Raumes:

Randbed.  $\tilde{G}(\underline{r}-\underline{r}') \rightarrow 0$  für  $r \rightarrow \infty$

$\Rightarrow$  retard. Potenzial

$$G(\underline{r}-\underline{r}', \underbrace{t-t'}_{\tau}) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi|\underline{r}-\underline{r}'|} \delta(\tau - \frac{|\underline{r}-\underline{r}'|}{c}) & \tau > 0 \\ 0 & \tau < 0 \end{cases}$$



$$\tilde{G}(\underline{r}-\underline{r}') := \int_0^{\infty} d\tau G(\underline{r}-\underline{r}', \tau) e^{i\omega\tau} = \frac{e^{ik|\underline{r}-\underline{r}'|}}{4\pi|\underline{r}-\underline{r}'|}$$

$$k := \frac{\omega}{c}$$

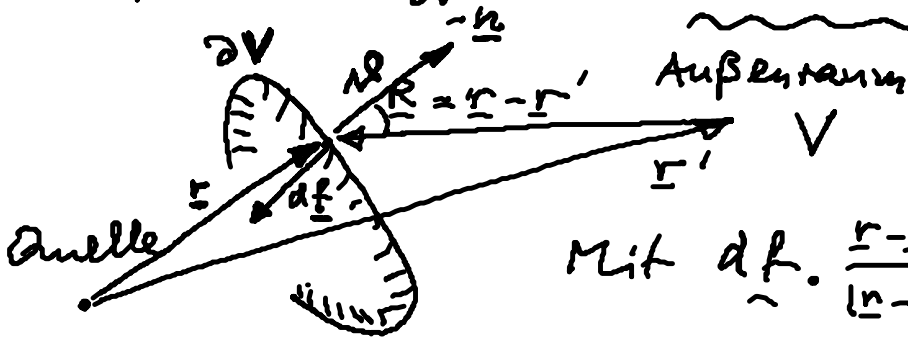
$$\Rightarrow \phi(\underline{r}, t) = \int_{\mathbb{R}^3} d^3r' \tilde{G}(\underline{r}-\underline{r}') e^{-i\omega t} \varphi(\underline{r}') / \epsilon_0$$

$$= \int_{\mathbb{R}^3} d^3r' \frac{e^{i(k|\underline{r}-\underline{r}'| - \omega t)}}{4\pi|\underline{r}-\underline{r}'|} \varphi(\underline{r}') / \epsilon_0$$

beschreibt Überlagerung auslaufender Kugelwellen  
( Ausstrahl bed., Konsequenz der Kausalität

Mit  $\underline{R} := \underline{r} - \underline{r}'$  lautet die Kirchhoff-Identität

$$\phi(\underline{r}') = \frac{1}{4\pi} \int_{\partial V} d\underline{f}_R \left\{ \underbrace{\frac{e^{ikR}}{R}}_{\text{Außenraum}} \nabla_{\underline{r}} \phi(\underline{r}) - \phi(\underline{r}) \underbrace{\nabla_{\underline{r}} \frac{e^{ikR}}{R}}_{\text{Innenraum}} \right\}$$



$$\frac{e^{ikR}}{R} \left( ik - \frac{1}{R} \right) \frac{r-r'}{|\underline{r}-\underline{r}'|}$$

Mit  $d\underline{f}_R \cdot \frac{\underline{r}-\underline{r}'}{|\underline{r}-\underline{r}'|} = d\underline{f} \cos \alpha$

und Beschränkung auf Fernzone von  $\partial V$   
(d.h.  $R \gg \frac{1}{k}$ )

$$\phi(\underline{r}') \approx \frac{1}{4\pi} \int_{\partial V} d\underline{f}_R \left\{ \frac{\partial}{\partial n} \phi(\underline{r}) - ik \phi(\underline{r}) \cos \alpha \right\} \frac{e^{ikR}}{R}$$

richtungsabh. Amplitude Kugelwelle

„Sekundärwelle“

Exakte Formulierung des Huygens'schen Prinzips

(Jeder Pkt. der Oberfläche eines Hindernisses ist Ausgangspkt. einer Kugelwelle; deren phasengerechte Überlagerung ergibt das Wellenfeld in  $\underline{r}'$ .)

(b) Greenfkt. zu Randbed.  $\tilde{G}(\underline{r}-\underline{r}') \Big|_{\substack{r \in \partial V \\ r' \in V}} = 0$

$$\Rightarrow \phi(\underline{r}') = - \int_{\partial V} d\underline{f} \phi(\underline{r}) \nabla_{\underline{r}} \tilde{G}(\underline{r}-\underline{r}')$$

neue Greenfkt. unterscheidet sich von der alten nur um additive Lösung  $g$  der homog. Wellengl.

$$\tilde{G}(\underline{R}) = g(\underline{R}) + \frac{1}{4\pi} \frac{e^{ikR}}{R}$$

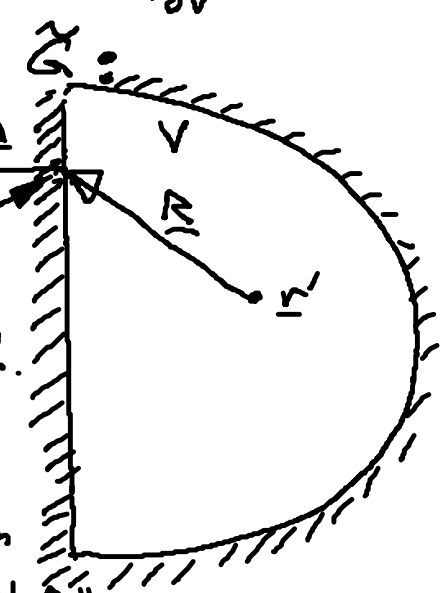
$(\Delta + k^2)g = 0$  mit Randbed.  $g \Big|_{\partial V} = -\frac{1}{4\pi} \frac{e^{ikR}}{R} \Big|_{\partial V}$

Beispiel für Konstruktion von  $\tilde{G}$ :  
Ebenes Schirm

Spiegelladungsmethode:

$$\tilde{G}(\underline{r}-\underline{r}') = \frac{1}{4\pi} \left( \frac{e^{ik|\underline{r}-\underline{r}'|}}{|\underline{r}-\underline{r}'|} - \frac{e^{ik|\underline{r}-\underline{r}''|}}{|\underline{r}-\underline{r}''|} \right)$$

$\underline{r}''$  Spiegelph.
Schirm



$$\nabla_{\underline{r}} \tilde{G}(\underline{r}-\underline{r}') = \frac{1}{4\pi} \left[ \nabla_{\underline{r}} \frac{e^{ikR}}{R} - \nabla_{\underline{r}} \frac{e^{ikR''}}{R''} \right]$$

$$= \frac{1}{4\pi} \left[ \frac{e^{ikR}}{R} \left( ik - \frac{1}{R} \right) \frac{\underline{r}-\underline{r}'}{|\underline{r}-\underline{r}'|} - \frac{e^{ikR''}}{R''} \left( ik - \frac{1}{R''} \right) \frac{\underline{r}-\underline{r}''}{|\underline{r}-\underline{r}''|} \right]$$

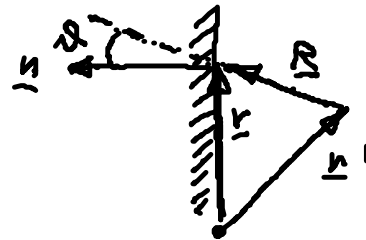
$R = R''$ ,  $d\underline{f} \cdot \frac{\underline{r}-\underline{r}'}{|\underline{r}-\underline{r}'|} = -d\underline{f} \cdot \frac{\underline{r}-\underline{r}''}{|\underline{r}-\underline{r}''|} = d\underline{f} \cos \alpha$

$$\Rightarrow d\underline{f} \cdot \nabla_{\underline{r}} \tilde{G} = d\underline{f} \frac{1}{2\pi} \frac{e^{ikR}}{R} \left( ik - \frac{1}{R} \right) \cos \alpha$$

Für  $\lambda \ll R$  (Fernzone):

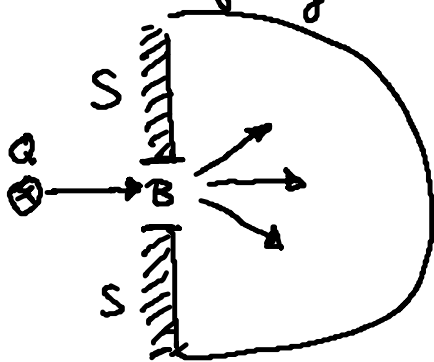
$$\phi(r') = - \int_{\partial V} [d\underline{f} \cdot \underline{\nabla}_r \tilde{G}(r-r')] \phi(r) = - \frac{i}{\lambda} \int_{\underline{F}} d\underline{f} \phi(r) \frac{e^{ik|r-r'|}}{|r-r'|} \cos \vartheta$$

Randwerte  $\phi(r)|_{\underline{F}}$  festlegen!



Kirchhoff'sche Näherung:

Biegung an Blenden B in einem ebenen Schirm S



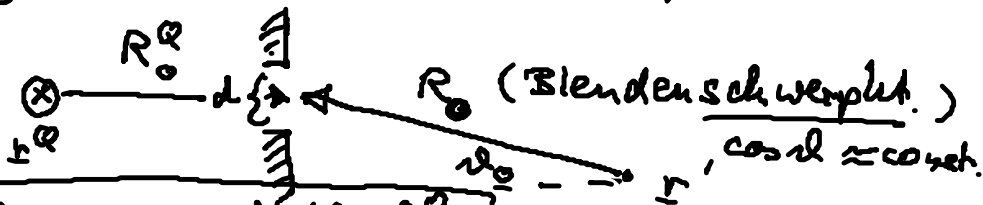
Annahme:  $\phi(r)|_S = 0$  (Leiter)

$$\phi(r)|_B = \frac{e^{ikR^Q}}{R^Q} \quad (\text{freie einfall. Welle})$$

$$\Rightarrow \phi(r') = - \frac{i}{\lambda} \int_B d\underline{f} \frac{e^{ik(R+R^Q)}}{R R^Q} \cos \vartheta$$

$$\begin{aligned} \underline{R} &= r - r' \\ \underline{R}^Q &= r - r^Q \\ d\underline{f} &= d^2 r \end{aligned}$$

Kleine Blende:  
(aber  $\lambda \ll d$ )



$$\phi(r') \approx - \frac{i}{\lambda} \frac{\cos \vartheta_0}{R_0 R_0^Q} \int_B d\underline{f} e^{ik(R+R^Q)}$$

im schnell osz. Exp. darf nicht  $R \approx R_0, R^Q \approx R_0^Q$  gesetzt werden!

Grenzfälle:

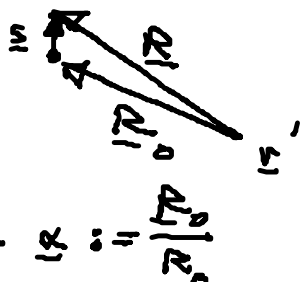
(i) Fraunhofer'sche Biegung (Fernzone.  $\lambda \ll d \ll R$ )

Setze  $\underline{R} = \underline{R}_0 + \underline{s}$

$$R^2 \approx R_0^2 + 2\underline{R}_0 \cdot \underline{s}$$

$$\Rightarrow R \approx R_0 + \alpha \cdot s$$

mit  $\alpha := \frac{d\underline{f}}{R_0}$

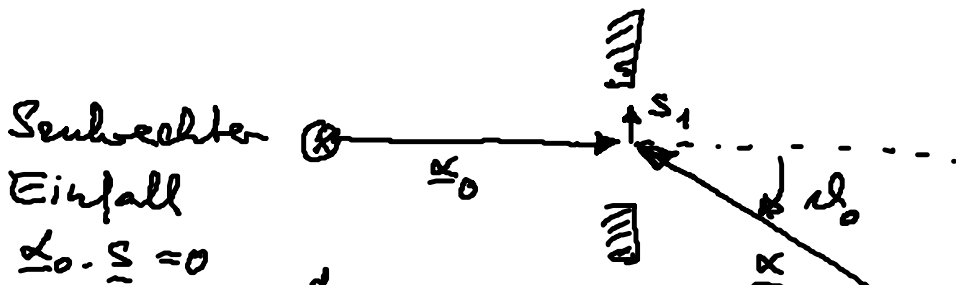


analog  $R^Q \approx R_0^Q + \underline{\alpha}_0 \cdot \underline{s}$  mit  $\underline{\alpha}_0 := \frac{\nabla R_0^Q}{R_0^Q}$

$$\Rightarrow \phi(\underline{r}') \approx -\frac{i}{\lambda} \frac{e^{ik(R_0 + R_0^Q)}}{R_0 R_0^Q} \cos \vartheta_0 \int_{\mathcal{B}} d^2 \underline{s} e^{ik(\underline{\alpha} + \underline{\alpha}_0) \cdot \underline{s}}$$

(ii) Fresnel'sche Beugung (Mittelzone  $\lambda \ll R \approx d$ )  
 $R^2 = R_0^2 + 2R_0 \underline{s} + s^2$

Beispiel: Fraunhofer'sche Beugung am Spalt  
 (1-dim.)  
 Integ.  $ds_1$



Senkrecht  $\otimes$   
 Einfall  $\underline{\alpha}_0 \cdot \underline{s} = 0$

$$\phi(\underline{r}') = C \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} ds_1 e^{ik\alpha s_1}$$

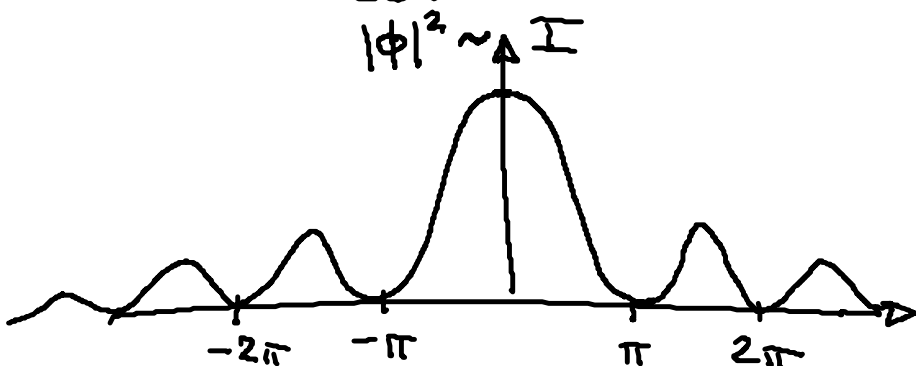
$\alpha := \sin \vartheta_0$  ( $\underline{\alpha} \cdot \underline{s} = s_1 \sin \vartheta_0$ )

$$= \frac{C}{ik\alpha} \left( e^{ik\alpha \frac{d}{2}} - e^{-ik\alpha \frac{d}{2}} \right)$$

$$\phi(\underline{r}') = Cd \frac{\sin(k\alpha \frac{d}{2})}{k\alpha \frac{d}{2}}$$

Spaltfunktion

(Fouriertransformierte der Rechteckfkt.  $\hat{=}$  Blende)



$k\alpha \frac{d}{2} = k \frac{d}{2} \sin \vartheta_0$   
 (Beob. richtung)

Beugungsminima bei  $\sin \vartheta_0 = n \frac{\lambda}{d}$