

# 5. Materie in elektrischen u. magnetischen Feldern

## 5.1 Polarisation

Materie enthält mikroskop. elektrisch geladene Bausteine (Elektronen, Kerne, Ionen, etc.):

(i) freie Ladungsträger (El. in Metallen, El. + Löcher in Halbleitern)

→ Beschleunigung in äußeren Feldern  $\underline{E}$ ,  $\underline{B}$ :

$$\underline{F} = q (\underline{E} + \underline{v} \times \underline{B})$$

→ el. Ströme → Beschreibung durch Materialeigenschaft  $\sigma$  (Leitföh.)

(ii) gebundene Ladungen (in Isolatoren)

→ Polarisation im  $\underline{E}$ -Feld

(a) Für  $\underline{E} = 0$  vorhandene unipol. Dipole  $\underline{p}$

→ Orientierung  $\uparrow \uparrow \underline{E}$  (gegen therm. Bewegung)

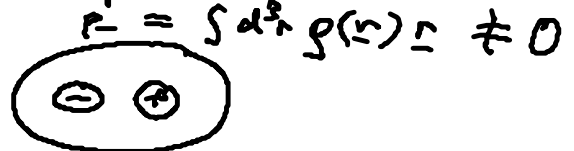
(Min. der pot. Energie  $W_{el} = -\underline{p} \cdot \underline{E}$ )

(b) Nichtpolare Atome / Moleküle werden durch  $\underline{E}$  polarisiert

⇒ induzierte el. Dipole  $\parallel \underline{E}$

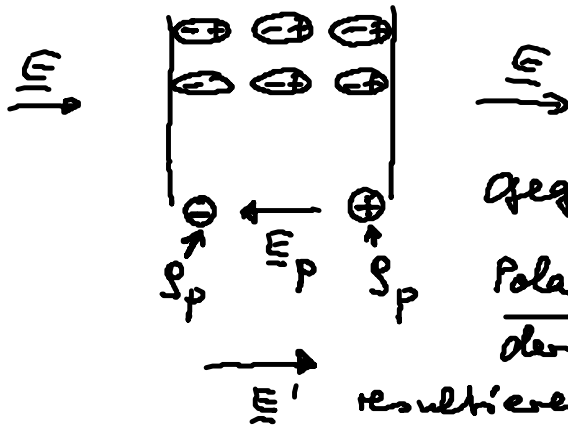


$$\underline{E} = 0$$



$$\underline{E} \neq 0$$

makroskopische räuml. Mittelung



Gegenfeld  $\underline{E}_p$  gemäß  $\epsilon_0 \nabla \cdot \underline{E}_p = \rho_p$

Polarisationsladungsdichte  
der gebundenen Ladungen

$\underline{E}'$  resultierendes Gesamtfeld

$$\underline{E}' = \underline{E} + \underline{E}_p$$

$$\epsilon_0 \nabla \cdot \underline{E}' = \rho + \rho_p$$

$$\epsilon_0 \nabla \cdot \underline{E} = \rho \quad \text{freie Lad.dichte}$$

Polarisation  $\underline{P}(\underline{r}, t) := -\epsilon_0 \underline{E}_p(\underline{r}, t)$

mikroskop.  
lokales Feld,  
dessen Quellen  
Polaris. Ladungen sind

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \underline{P} &= -\rho_p \\ \nabla \cdot (\epsilon_0 \underline{E}' + \underline{P}) &= \rho \end{aligned}$$

Dielekt. Verschiebung  $\underline{D}(\underline{r}, t) := \epsilon_0 \underline{E}' + \underline{P}$

effektive makroskop. Feldgröße, als deren Quellen  
nur die freien Ladungen auftreten:

$$\nabla \cdot \underline{D} = \rho$$

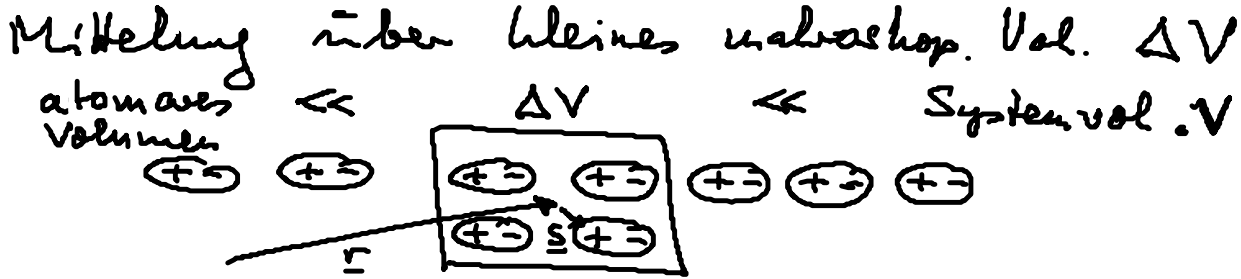
$$\underline{D} = \epsilon_0 \underline{E} \quad (\text{äußeres Feld, nur durch freie Lad. erzeugt})$$

Zusammenhang mit den mikroskop. el. Dipolen

$$\rho_m(\underline{r}, t) = \sum_i q_i \delta(\underline{r} - \underline{r}_i(t)) \quad \text{mikroskop. Ladungsdichte}$$

$$\underline{P}_m(\underline{r}, t) = \sum_i \underline{p}_i(t) \delta(\underline{r} - \underline{r}_i(t)) \quad \text{mikroskop. Dipoldichte}$$

$$\int \underline{P}_m d^3r = \sum_i \underline{p}_i$$



$$\Rightarrow \rho(\underline{r}, t) = \frac{1}{\Delta V} \int_{\Delta V} d^3s \rho_m(\underline{r} + \underline{s}, t) \quad \text{makroskop. Ladungsdichte}$$

$$\underline{P}(\underline{r}, t) = \frac{1}{\Delta V} \int_{\Delta V} d^3s \underline{P}_m(\underline{r} + \underline{s}, t)$$

makroskop. Dipoldichte  $\equiv$  Polarisation (\*)

Beweis von (\*) :

mikroskop. retardiertes Pot. :

$$\phi_m(\underline{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathbb{R}^3} d^3r' \frac{1}{|\underline{r} - \underline{r}'|} \rho_m(\underline{r}', t - \frac{|\underline{r} - \underline{r}'|}{c})$$

mikroskop. Ladungsdichte

makroskop. gemitteltes Potenzial :

$$\phi(\underline{r}, t) = \frac{1}{\Delta V} \int_{\Delta V} d^3s \phi_m(\underline{r} + \underline{s}, t)$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\Delta V} \int_{\Delta V} d^3s \int_{\mathbb{R}^3} d^3r' \frac{\rho_m(\underline{r}', t - \frac{|\underline{r} + \underline{s} - \underline{r}'|}{c})}{|\underline{r} + \underline{s} - \underline{r}'|}$$

Subst.  $\underline{r}'' := \underline{r}' - \underline{s}$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\Delta V} \int_{\Delta V} d^3s \int_{\mathbb{R}^3} d^3r'' \frac{\rho_m(\underline{r}'' + \underline{s}, t - \frac{|\underline{r} - \underline{r}''|}{c})}{|\underline{r} - \underline{r}''|}$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathbb{R}^3} d^3r'' \frac{1}{|\underline{r} - \underline{r}''|} \underbrace{\frac{1}{\Delta V} \int_{\Delta V} d^3s \rho_m(\underline{r}'' + \underline{s}, t - \frac{|\underline{r} - \underline{r}''|}{c})}_{\rho(\underline{r}'', t - \frac{|\underline{r} - \underline{r}''|}{c})}$$

# Analog

makroskop. gemittelte  
Ladungsdichte

mikroskop. Pot. der el. Dipole  $\underline{p}_i$  (§ 4.3): Lorenz-Eichung

$$\phi_m(\underline{r}, t) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \nabla_r \left\{ \sum_i \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}_i|} \underline{p}_i \left( t - \frac{|\underline{r}-\underline{r}_i|}{c} \right) \right\}$$

mikroskop. Dipolmoment

$$= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathbb{R}^3} d^3r' \nabla_r \left\{ \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|} \underline{P}_m(\underline{r}', t - \frac{|\underline{r}-\underline{r}'|}{c}) \right\}$$

mikroskop. Dipoldichte

$$\underline{P}_m(\underline{r}', t) = \sum_i \underline{p}_i \delta(\underline{r}' - \underline{r}_i)$$

Makroskop. gemitteltes el. Dipolpotenzial:

$$\phi(\underline{r}, t) = \frac{1}{\Delta V} \int_{\Delta V} d^3s \phi_m(\underline{r}+\underline{s}, t)$$

$$= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\Delta V} \int_{\Delta V} d^3s \int_{\mathbb{R}^3} d^3r' \nabla_r \left\{ \frac{\underline{P}_m(\underline{r}', t - \frac{|\underline{r}+\underline{s}-\underline{r}'|}{c})}{|\underline{r}+\underline{s}-\underline{r}'|} \right\}$$

$$\stackrel{\underline{r}'' = \underline{r}' - \underline{s}}{=} -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathbb{R}^3} d^3r'' \nabla_r \left\{ \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}''|} \underline{P}_m(\underline{r}'', t - \frac{|\underline{r}-\underline{r}''|}{c}) \right\}$$

makroskop. Dipoldichte

Umformung:

$$\nabla_r \left\{ \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|} \underline{P}_m(\underline{r}', t - \frac{|\underline{r}-\underline{r}'|}{c}) \right\}$$

$$= -\nabla_{r'} \left\{ \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|} \underline{P}_m(\underline{r}', t - \frac{|\underline{r}-\underline{r}'|}{c}) \right\} + \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|} \left[ \nabla_{r'} \underline{P}_m(\underline{r}', t') \right]_{t' = t - \frac{|\underline{r}-\underline{r}'|}{c}}$$

$$\Rightarrow \phi(\underline{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathbb{R}^3} d^3r' \nabla_{r'} \left\{ \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|} \underline{P}_m(\underline{r}', t - \frac{|\underline{r}-\underline{r}'|}{c}) \right\}$$

= 0 (Gauß)

$$+ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathbb{R}^3} d^3r' \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|} \underbrace{\left[ -\underline{\nabla}_{r'} \cdot \underline{P}(\underline{r}', t') \right]}_{\rho_p(\underline{r}', t - \frac{|\underline{r}-\underline{r}'|}{c})} \Big|_{t'=t-\frac{|\underline{r}-\underline{r}'|}{c}}$$

Dies ist das makroskop. Pot. einer Ladungsdichte

$$\rho_p(\underline{r}', t') = -\underline{\nabla}_{r'} \cdot \underline{P}(\underline{r}', t')$$

Damit können wir die makroskop. Dipoldichte  $\underline{P}$  mit der durch  $\underline{P} := -\epsilon_0 \underline{E}_p$  bzw.  $\underline{\nabla} \cdot \underline{P} = -\rho_p$  definierten Polarisation identifizieren.