5. Materie in elektrischen u. magnetischen Feldern

5.1 Polarisation

Materie enthält mikroskop. elektrisch geladene Bausteine (Elektronen, Kerne, Ionen, etc.):

(i) freie Ladungsträger (El. in Metallen, El. + Löcher in Halbleitern)

→ Beschleunigung in äußeren Feldern $\mathbf{E}$, $\mathbf{B}$:

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

→ el. Strömen → Beschreibung durch Materialeigenschaft σ (Leitfäh.)

(ii) gebundene Ladungen (in Isolatoren)

→ Polarisierung im $\mathbf{E}$-Feld

(a) Für $\mathbf{E}=0$ vorhandene molek. Dipole $\mathbf{p}$

→ Orientierung $\uparrow\uparrow \mathbf{E}$ (gegen therm. Bewegung)

(Min. der pot. Energie $W_{el} = -\mathbf{p}\mathbf{E}$)

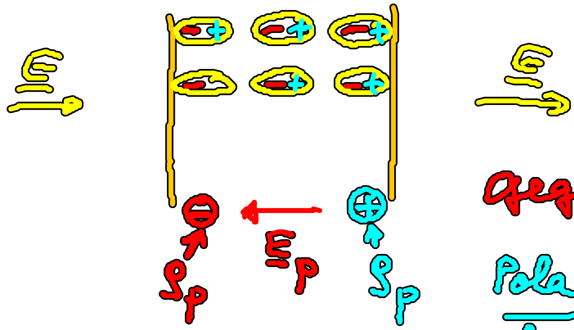
(b) Nichtpolare Atome / Moleküle werden durch $\mathbf{E}$ polarisiert

⇒ induzierte el. Dipole $\parallel \mathbf{E}$

$\mathbf{p} = 0$ $\qquad$ $\mathbf{p} = \int d^3r\, \rho(\mathbf{r})\, \mathbf{r} \neq 0$

$\mathbf{E} = 0$ $\qquad$ $\mathbf{E} \neq 0$

Makroskopische räuml. Mittelung



Gegenfeld $\underline{E}_p$ gemäß $\epsilon_0 \underline{\nabla} \cdot \underline{E}_p = \varrho_p$

Polarisationsladungsdichte der gebundenen Ladungen

$\underline{E}'$ resultierendes Gesamtfeld

$$\underline{E}' = \underline{E} + \underline{E}_p$$

$$\boxed{\epsilon_0 \underline{\nabla} \cdot \underline{E}' = \varrho + \varrho_p} \quad , \quad \epsilon_0 \underline{\nabla} \cdot \underline{E} = \varrho \text{ freie Lad.dichte}$$

Polarisation $\underline{P}(\underline{r}, t) := -\epsilon_0 \underline{E}_p(\underline{r}, t)$ makroskop. lokales Feld, dessen Quellen Polaris.ladungen sind

$$\boxed{\begin{aligned} \underline{\nabla} \cdot \underline{P} &= -\varrho_p \\ \underline{\nabla} \cdot (\epsilon_0 \underline{E}' + \underline{P}) &= \varrho \end{aligned}}$$

Dielektr. Verschiebung $\underline{D}(\underline{r}, t) := \epsilon_0 \underline{E}' + \underline{P}$

effektive makroskop. Feldgröße, als deren Quellen nur die freien Ladungen auftreten:

$$\boxed{\underline{\nabla} \cdot \underline{D} = \varrho}$$

$\underline{D} = \epsilon_0 \underline{E}$ (äußeres Feld, nur durch freie Lad.erzeugt)

Zusammenhang mit den mikroskop. el. Dipolen

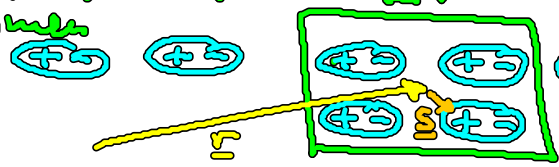
$$\varrho_m(\underline{r}, t) = \sum_i q_i \, \delta(\underline{r} - \underline{r}_i(t)) \quad \text{mikroskop. Ladungsdichte}$$

$$\underline{P}_m(\underline{r}, t) = \sum_i \underline{p}_i(t) \, \delta(\underline{r} - \underline{r}_i(t)) \quad \text{mikroskop. Dipoldichte}$$

$$\int \underline{P}_m \, d^3r = \sum_i \underline{p}_i$$

Mittelung über kleines makroskop. Vol. ΔV

atomares Volumen $\ll \Delta V \ll$ Systemvol. V



$$\Rightarrow \rho(\underline{r},t) = \frac{1}{\Delta V}\int_{\Delta V} d^3s\, \rho_m(\underline{r}+\underline{s},t)$$ makroskop. Ladungsdichte

$$\underline{P}(\underline{r},t) = \frac{1}{\Delta V}\int_{\Delta V} d^3s\, \underline{P}_m(\underline{r}+\underline{s},t)$$

<u>makroskop. Dipoldichte</u> $\equiv$ <u>Polarisation</u> (*)

<u>Beweis von (*) :</u>

mikroskop. retardiertes Pot. :

$$\phi_m(\underline{r},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\mathbb{R}^3} d^3r'\, \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|}\,\rho_m\Big(\underline{r}',t-\frac{|\underline{r}-\underline{r}'|}{c}\Big)$$ mikroskop. Ladungsdichte

makroskop. gemitteltes Potenzial :

$$\phi(\underline{r},t) = \frac{1}{\Delta V}\int_{\Delta V} d^3s\, \phi_m(\underline{r}+\underline{s},t)$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{1}{\Delta V}\int_{\Delta V} d^3s \int_{\mathbb{R}^3} d^3r'\, \frac{\rho_m\Big(\underline{r}',t-\frac{|\underline{r}+\underline{s}-\underline{r}'|}{c}\Big)}{|\underline{r}+\underline{s}-\underline{r}'|}$$

Subst. $\underline{r}'' := \underline{r}' - \underline{s}$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{1}{\Delta V}\int_{\Delta V} d^3s \int_{\mathbb{R}^3} d^3r''\, \frac{\rho_m\Big(\underline{r}''+\underline{s},t-\frac{|\underline{r}-\underline{r}''|}{c}\Big)}{|\underline{r}-\underline{r}''|}$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\mathbb{R}^3} d^3r''\, \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}''|}\,\underbrace{\frac{1}{\Delta V}\int_{\Delta V} d^3s\, \rho_m\Big(\underline{r}''+\underline{s},t-\frac{|\underline{r}-\underline{r}''|}{c}\Big)}_{\rho\big(\underline{r}'',\,t-\frac{|\underline{r}-\underline{r}''|}{c}\big)}$$

Analog — makroskop. gemittelte Ladungsdichte

mikroskop. Pot. der el. Dipole $\underline{p}_i$ (§ 4.3): Lorenz-Eichung

$$\phi_m(\underline{r},t) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\underline{\nabla}_r\left\{\sum_i \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}_i|}\underline{p}_i\left(t-\frac{|\underline{r}-\underline{r}_i|}{c}\right)\right\}$$

mikroskop. Dipolmoment

$$= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{\mathbb{R}} d^3r'\,\underline{\nabla}_r\left\{\frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|}\underline{P}_m\left(\underline{r}',t-\frac{|\underline{r}-\underline{r}'|}{c}\right)\right\}$$

mikroskop. Dipoldichte

$$\underline{P}_m(\underline{r}',t) = \sum_i \underline{p}_i\,\delta(\underline{r}'-\underline{r}_i)$$

Makroskop. gemittelte el. Dipolpotenzial:

$$\phi(\underline{r},t) = \frac{1}{\Delta V}\int_{\Delta V} d^3s\;\phi_m(\underline{r}+\underline{s},t)$$

$$= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{\Delta V}\int_{\Delta V} d^3s\int_{\mathbb{R}^3} d^3r'\,\underline{\nabla}_r\left\{\frac{\underline{P}_m\left(\underline{r}',t-\frac{|\underline{r}+\underline{s}-\underline{r}'|}{c}\right)}{|\underline{r}+\underline{s}-\underline{r}'|}\right\}$$

$$\overset{\underline{r}''=\underline{r}'-\underline{s}}{=} -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{\mathbb{R}^3} d^3r''\,\underline{\nabla}_r\left\{\frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}''|}\underline{P}\left(\underline{r}'',t-\frac{|\underline{r}-\underline{r}''|}{c}\right)\right\}$$

makroskop. Dipoldichte

Umformung:

$$\underline{\nabla}_r\left\{\frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|}\underline{P}\left(\underline{r}',t-\frac{|\underline{r}-\underline{r}'|}{c}\right)\right\}$$

$$= -\underline{\nabla}_{r'}\left\{\frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|}\underline{P}\left(\underline{r}',t-\frac{|\underline{r}-\underline{r}'|}{c}\right)\right\} + \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|}\left[\underline{\nabla}_{r'}\underline{P}(\underline{r}',t')\right]_{t'=t-\frac{|\underline{r}-\underline{r}'|}{c}}$$

$$\Rightarrow \phi(\underline{r},t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\underbrace{\int_{\mathbb{R}} d^3r'\,\underline{\nabla}_{r'}\left\{\frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|}\underline{P}\left(\underline{r}',t-\frac{|\underline{r}-\underline{r}'|}{c}\right)\right\}}_{=0\ \text{(Gauß)}}$$

$$+\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{\mathbb{R}^3} d^3r' \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|} \underbrace{\left[-\underline{\nabla}_{r'}\cdot\underline{P}(\underline{r}',t')\right]_{t'=t-\frac{|\underline{r}-\underline{r}'|}{c}}}_{\rho_P\left(\underline{r}',\,t-\frac{|\underline{r}-\underline{r}'|}{c}\right)}$$

Dies ist das makroskop. Pot. einer Ladungsdichte

$$\boxed{\rho_P(\underline{r}',t') = -\underline{\nabla}_{r'}\cdot\underline{P}(\underline{r}',t')}$$

Damit können wir die makroskop. Dipoldichte $\underline{P}$ mit der durch $\underline{P} := -\epsilon_0 \underline{E}_P$ bzw. $\underline{\nabla}\cdot\underline{P} = -\rho_P$ definierten Polarisation identifizieren.