5.2 Magnetisierung

Mikroskop. Ursache für Magnetisierung der Materie sind mikroskop. Kreisströme bzw. mikroskop. magn. Dipolmomente $\underline{m}$:

(a) für $\underline{B}=0$ vorhandene permanente magn. Momente $\underline{m}$ werden zur Minimierung der pot. Energie

$W_{magn} = -\underline{m}\,\underline{B}$

vorzugsweise (gegen therm. Bewegung) $\uparrow\uparrow \underline{B}$ orientiert (z.B. Bahn- u. Spinmomente von Elektronen).

$\longrightarrow$ Paramagnetismus

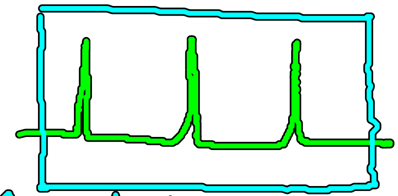
(b) Durch $\underline{B}$ können Kreisströme freier oder gebundener Ladungen induziert werden (Faraday-Gesetz)

Lenz'sche Regel $\rightarrow$ Magn. $\uparrow\downarrow \underline{B}$

$\longrightarrow$ Diamagnetismus

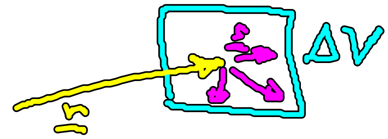
Makroskop. gemittelte Felder

mikroskop. magnet. Dipoldichte:



$$\underline{M}_m(\underline{r},t) = \sum_i \underline{m}_i(t)\,\delta(\underline{r}-\underline{r}_i)$$

Mittelung über kleines makroskop. Vol. ΔV:



$$\underline{M}(\underline{r},t) = \frac{1}{\Delta V}\int_{\Delta V} d^3s\;\underline{M}_m(\underline{r}+\underline{s},t)$$

makroskop. magn. Dipoldichte $\equiv$ Magnetisierung

Ziel: Zus.hang zwischen der magn. Dipoldichte $\underline{M}$ u. den effektiven Feldern $\underline{B}$ in der Materie.

Zeige, dass eine Magnetisierungsstromdichte $\underline{j}_M$ als „Quelle" der Felder eingeführt werden kann:

$$\underline{\nabla}\times\underline{B}_M = \mu_0\,\underline{j}_M \quad \text{bzw.} \quad \underline{\nabla}\times\underline{M} = \underline{j}_M$$

eff. Gesamtinduktion (stationär)

$$\underline{B}' = \underline{B} + \underline{B}_M \Rightarrow \underline{\nabla}\times\left(\frac{1}{\mu_0}\underline{B}'\right) = \underbrace{\underline{\nabla}\times\left(\frac{1}{\mu_0}\underline{B}\right)}_{\underline{j}} + \underline{j}_M$$

Erzeugung durch freie Ströme:

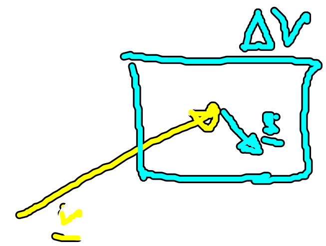
$$\boxed{\underline{\nabla}\times\Big(\underbrace{\frac{1}{\mu_0}\underline{B}' - \underline{M}}_{\underline{H}}\Big) = \underline{j}}$$

Betrachte Vektorpot. der mikroskop. el. und magn. Dipole (§ 4.3):

$$\underline{A}_m(\underline{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\sum_i \left\{ \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}_i|}\,\underbrace{\dot{\underline{p}}_i}_{\text{el. Dipolmoment}}\left(t-\frac{|\underline{r}-\underline{r}_i|}{c}\right) + \nabla\times\left(\frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}_i|}\,\underbrace{\underline{m}_i}_{\text{magn. Dipolmoment}}\left(t-\frac{|\underline{r}-\underline{r}_i|}{c}\right)\right)\right\}$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3r' \left\{ \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|}\,\underbrace{\dot{\underline{P}}_m}_{\text{mikr. el. Dipoldichte}}\left(\underline{r}',t-\frac{|\underline{r}-\underline{r}'|}{c}\right) + \nabla_{r'}\times\left(\frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|}\,\underbrace{\underline{M}_m}_{\text{mikr. magn. Dipoldichte}}\left(\underline{r}',t-\frac{|\underline{r}-\underline{r}'|}{c}\right)\right)\right\}$$

Makrosk. gemitteltes Pot.:



$$\underline{A}(\underline{r},t) = \frac{1}{\Delta V}\int d^3s\; \underline{A}_m(\underline{r}+\underline{s},t)$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3r' \left\{ \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|}\,\dot{\underline{P}}\left(\underline{r}',t-\frac{|\underline{r}-\underline{r}'|}{c}\right) + \nabla_{r'}\times\left(\frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|}\,\underline{M}\left(\underline{r}',t-\frac{|\underline{r}-\underline{r}'|}{c}\right)\right)\right\}$$

makroskop. Dipoldichten

$$\int d^3r'\, \nabla_r \times \left\{\frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|}\,\underline{M}\left(\underline{r}',t-\frac{|\underline{r}-\underline{r}'|}{c}\right)\right\} = \underbrace{-\int d^3r'\, \nabla_{r'}\times\{\dots\}}_{0\ \text{(Gauß)}}$$

$$+\int d^3r' \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|}\left[\nabla_{r'}\times\underline{M}(\underline{r}',t')\right]_{t'=t-\frac{|\underline{r}-\underline{r}'|}{c}=:t^{ret}}$$

Def.: Magnetisierungsstromdichte

Polarisationsstromdichte

$$\boxed{\begin{aligned}\underline{j}_M &:= \nabla\times\underline{M}\\ \underline{j}_P &:= \frac{\partial}{\partial t}\underline{P}\end{aligned}}$$

$$\underline{A}(\underline{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3r' \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|}\left\{\underline{j}_P(\underline{r}',t^{ret}) + \underline{j}_M(\underline{r}',t^{ret})\right\}$$

wird durch die Polarisations- u. Magnetisierungs-stromdichten in Materie erzeugt.

Es gilt der Erhaltungssatz:

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho_P = -\underline{\nabla}\cdot\underline{\dot{P}} = -\underline{\nabla}\cdot\underline{j}_P$$

$$\boxed{\dot{\rho}_P + \underline{\nabla}\cdot\underline{j}_P = 0}$$ Erhaltung der Polarisationsladung

5.3. Maxwell-Gleichungen in Materie

Vollständige Pot. enthalten

- freie Ladungs- u. Stromdichten $\rho, \underline{j}$
- Polarisations- u. Magnetisierungsbeiträge $\rho_P, \underline{j}_P, \underline{j}_M$

$$\underline{A}(\underline{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3r' \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|}\left\{\underline{j}(\underline{r}',t^{ret}) + \underline{j}_P(\underline{r}',t^{ret}) + \underline{j}_M(\underline{r}',t^{ret})\right\}$$

$$\phi(\underline{r},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int d^3r' \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|}\left\{\rho(\underline{r}',t^{ret}) + \rho_P(\underline{r}',t^{ret})\right\}$$

$\underline{A}, \phi$ sind also Lösungen der inhom. Wellengln.

$$\left.\begin{aligned} \Box\underline{A}(\underline{r},t) &= -\mu_0(\underline{j} + \underline{j}_P + \underline{j}_M) \\ \Box\phi(\underline{r},t) &= -\frac{1}{\varepsilon_0}(\rho + \rho_P) \end{aligned}\right\} \text{Lorenz-Eichung}$$

Für $\underline{E}, \underline{B}$ in Materie folgt:

$$\underline{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\underline{A} - \underline{\nabla}\phi$$

$$\underline{B} = \underline{\nabla}\times\underline{A}$$

$$\Rightarrow (1) \quad \underline{\nabla} \times \underline{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\underline{B} \quad \Big\} \text{ wie Vakuum}$$

$$(2) \quad \underline{\nabla} \cdot \underline{B} = 0$$

$$\underline{\nabla} \cdot \underline{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\underbrace{\underline{\nabla} \cdot \underline{A}}_{-\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\phi} - \underline{\nabla} \cdot \underline{\nabla}\phi = -\Box\phi = \frac{1}{\epsilon_0}(\rho + \rho_p)$$

$$= \frac{1}{\epsilon_0}(\rho - \underline{\nabla} \cdot \underline{P})$$

$$\Rightarrow (3) \quad \underline{\nabla} \cdot \underbrace{\left(\epsilon_0 \underline{E}(\underline{x},t) + \underline{P}(\underline{x},t)\right)}_{\underline{D}(\underline{x},t) \text{ diel. Verschiebung}} = \rho(\underline{x},t)$$

$$\underline{\nabla} \times \underline{B} = \underline{\nabla} \times (\underline{\nabla} \times \underline{A}) = \underline{\nabla}(\underbrace{\underline{\nabla} \cdot \underline{A}}_{-\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\phi}) - \Delta \underline{A}$$

$$= -\Delta \underline{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\underbrace{\underline{\nabla}\phi}_{= -\underline{E} - \frac{\partial}{\partial t}\underline{A}}$$

$$= -\Box \underline{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\underline{E}$$

$$= \mu_0(\underline{j} + \underbrace{\underline{j}_p}_{\dot{\underline{P}}} + \underbrace{\underline{j}_M}_{\underline{\nabla} \times \underline{M}}) + \epsilon_0\mu_0\frac{\partial}{\partial t}\underline{E}$$

$$= \mu_0\frac{\partial}{\partial t}(\epsilon_0\underline{E} + \underline{P}) + \mu_0\underline{\nabla} \times \underline{M} + \mu_0\underline{j}$$

$$(4) \quad \underline{\nabla} \times \underbrace{\left(\frac{1}{\mu_0}\underline{B} - \underline{M}\right)}_{\underline{H}(\underline{x},t) \text{ Magnetfeld}} = \underline{j} + \frac{\partial}{\partial t}\underline{D}$$

Zus.fassung der Maxwellgln.

$$(1)\quad \underline{\nabla} \times \underline{E} + \frac{\partial}{\partial t}\underline{B} = 0$$
$$(2)\quad \underline{\nabla} \cdot \underline{B} = 0$$

WW der Felder mit Probeladungen

$$(3)\quad \underline{\nabla} \cdot \underline{D} = \rho$$
$$(4)\quad \underline{\nabla} \times \underline{H} - \frac{\partial}{\partial t}\underline{D} = \underline{j}$$

Erzeugung der Felder durch freie Ladungen u. Ströme

$$(5)\quad \underline{D} = \varepsilon_0 \underline{E} + \underline{P}$$
$$(6)\quad \underline{H} = \frac{1}{\mu_0}\underline{B} - \underline{M}$$

Die Feldgln. (1) – (6) sind nicht vollständig!
Ergänzung durch Materialgleichungen notwendig.

(Zus.hang $\underline{P} \Leftrightarrow \underline{E}$, $\underline{M} \Leftrightarrow \underline{B}$)

Einfachster Fall

(i) isotrope Materie $\Rightarrow$ $\underline{P} \uparrow\uparrow \underline{E}$ — skalar

$\underline{M} \uparrow\uparrow \underline{B}$ (paramagn.) oder $\underline{M} \uparrow\downarrow \underline{B}$ (diamagn.)

(ii) nicht zu hohe Felder $\Rightarrow$ $\underline{P} \sim \underline{E}$, $\underline{M} \sim \underline{B}$ — linear

(iii) kein Gedächtniseffekt
keine nichtlokale WW

$\underline{P}(x,t) \sim \underline{E}(x,t)$
$\underline{M}(x,t) \sim \underline{B}(x,t)$

instantan
lokal

$$\boxed{\begin{aligned} \underline{P} &= \epsilon_0 \chi_e \underline{E} \\ \underline{M} &= \chi_M \underline{H} \end{aligned}}$$

elektr. Suszeptibilität χ_e
magn. Suszeptibilität χ_M
(Materialkonstanten)

suscipere

berechnen aus mikroskop. Theorien (Quantentheorie, Festkörperphysik)

$$\underline{D} = \epsilon_0 \underline{E} + \underline{P}$$
$$= \epsilon_0 (1 + \chi_e) \underline{E}$$
$$= \epsilon_0 \epsilon \underline{E} \quad \text{mit} \quad \epsilon := 1 + \chi_e$$

(relative Dielektrizitätskonstante)
dielectric permittivity

$$\underline{B} = \mu_0 (\underline{H} + \underline{M})$$
$$= \mu_0 (1 + \chi_M) \underline{H}$$
$$= \mu_0 \mu \underline{H} \quad \text{mit} \quad \mu := 1 + \chi_M$$

(relative Permeabilität)
permeare

$$\Rightarrow \underline{M} = \chi_M \underline{H} = \frac{1}{\mu_0} \frac{\chi_M}{\mu} \underline{B} = \frac{1}{\mu_0} \frac{\chi_M}{1 + \chi_M} \underline{B}$$