

5.6 Wellenausbreitung in Materie

Annahme: homogene, isotrope, lineare Medien
mit skalaren Materialparametern ϵ, μ, σ :

$$\underline{D} = \epsilon_0 \epsilon \underline{E} \quad (\epsilon > 1)$$

$$\underline{B} = \mu_0 \mu \underline{H} \quad (\text{i.a. } \mu \approx 1)$$

$$\underline{j} = \sigma \underline{E} \quad (\text{Ohm'sches Gesetz})$$

a) Wellen in leitenden Medien ohne Dispersion
(d.h. ϵ, μ, σ unabh. von ω)

Sei $g = 0$

$$\nabla_x \underline{E} + \dot{\underline{B}} = 0$$

$$\nabla_x \underline{B} - \mu_0 \mu \epsilon_0 \epsilon \dot{\underline{E}} = \mu_0 \mu \underline{j} = \mu_0 \mu \sigma \underline{E}$$

$$\left| \begin{array}{l} \nabla \cdot \underline{E} = 0 \\ \nabla \cdot \underline{B} = 0 \end{array} \right.$$

$$\rightarrow \nabla_x (\nabla_x \underline{E}) - \nabla (\underbrace{\nabla \cdot \underline{E}}_0) - \Delta \underline{E} = -\nabla_x \dot{\underline{B}} = -\mu_0 \mu \epsilon_0 \epsilon \dot{\underline{E}} - \mu_0 \mu \sigma \underline{E}$$

$$\Delta \underline{E} - \frac{1}{c_M^2} (\dot{\underline{E}} + \frac{\sigma}{\epsilon_0 \epsilon} \underline{E}) = 0$$

gedämpfte Wellenl. mit $c_M = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \epsilon \mu_0 \mu}} = \frac{c}{\sqrt{\mu \epsilon}}$

(1-dim.: Telegraphenl., beschreibt Drahtwellenausbreitung)

Harmon. ebene Welle (spezielle Lösung)

$$\underline{E}(\underline{r}, t) = \underline{E}_0 e^{i(\underline{k} \cdot \underline{r} - \omega t)}$$

$$\Rightarrow \boxed{k^2 = \epsilon \mu \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 + i \frac{1}{\omega \tau}\right)}$$

diel. Verlust.
Leitungsstrom

Dispersions-Relation

$\tau := \frac{\epsilon_0 \epsilon}{\sigma}$
dielektr. Relaxationszeit

\Rightarrow Wellenvektor $k \in \mathbb{C}$ (wegen Dämpfung)

Setze $\boxed{k = \frac{\omega}{c} \tilde{n} = \frac{\omega}{c} (n + i\gamma)}$

c Vakuumlichtgeschw.
 $\tilde{n} = n + i\gamma$ komplexer Brechungsindex

$$\Rightarrow k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} (n^2 - \gamma^2 + 2i n \gamma) \stackrel{!}{=} \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon \mu \left(1 + \frac{i}{\omega \tau}\right)$$

$$\Rightarrow \left. \begin{aligned} n^2 - \gamma^2 &= \epsilon \mu \\ n \gamma &= \frac{\epsilon \mu}{2 \omega \tau} \end{aligned} \right\} n, \gamma$$

oBdA $k \parallel x_3$: $\underline{E}(x_3, t) = \underline{E}_0 e^{-\frac{x_3}{d}} e^{-i\omega t - \frac{n}{c} x_3}$

gedämpfte Welle mit Phasengeschw. $\frac{c}{n}$
 und Extinktionskoeff. $\alpha := \frac{c}{\omega \tau}$

Lineare Polarisation : $\underline{E}_0 \parallel x_1 \Rightarrow \underline{B}_0 \parallel x_2$

$$(\nabla \times \underline{E})_2 = \frac{\partial E_1}{\partial x_3} = -\dot{B}_2$$

$$\Rightarrow i \frac{\omega}{c} (n + i\gamma) E_1 = -i \omega B_2$$

$$\Rightarrow B_2 = \frac{n + i\gamma}{c} E_1 = \frac{\sqrt{n^2 + \gamma^2}}{c} e^{i\varphi} E_1$$

↑
 Phasenverschiebung φ
 zwischen \underline{E} u. \underline{B}

Isolator ($\sigma = 0$) : $\tau \rightarrow \infty \Rightarrow \eta = 0, \varphi = 0$
 (ungedämpft) ($\underline{E}, \underline{B}$ u. Phase)

reeller Brechungsindex $\frac{c}{n} < c$

NB: Nur eine Dispersion ist ϵ reell

Metall (σ groß) : $\tau = \frac{\epsilon_0 \epsilon}{\sigma} \ll \frac{1}{\omega}$ (für alle Frequ.)

$$k^2 \equiv \frac{\omega^2}{c^2} (n^2 - \eta^2 + 2i\eta) \approx \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon \frac{i}{\omega \tau}$$

$$\Rightarrow n^2 - \eta^2 \approx 0$$

$$\frac{n}{\eta} \approx n^2 \approx \eta^2 \approx \frac{\epsilon \mu}{2\omega \tau} \Rightarrow n = \eta = \sqrt{\frac{\epsilon \mu}{2\omega \tau}}$$

$$\tan \varphi \equiv \frac{\eta}{n} \approx 1$$

$$\Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{4}$$

Extinktionskoeff. $\alpha = \frac{c}{\omega \tau} \sim \text{cm}$ für 100 Hz

hochfrequente Wellen dringen nicht ins Metall ein!

Grund: Verschiebungsstrom \ll Leitungsstrom

b) Dielektr. Dispersion (Ann.: $\mu = 1$)

Betrachte zeitliche Dispersion, d.h. $\hat{\chi}(\omega)$:

$$\hat{\underline{P}}(\omega) = \epsilon_0 \hat{\chi}(\omega) \hat{\underline{E}}(\omega)$$

mit $\hat{\chi}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dt \chi(t) e^{i\omega t}$ (dynam. Suszept.)

$$\text{Fourier-Transf. : } \underline{P}(z, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \hat{\underline{P}}(z, \omega) e^{-i\omega t}$$

$$\hat{\underline{E}}(z, \omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dt \underline{E}(z, t) e^{i\omega t}$$

$$\Rightarrow \underline{P}(z, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \epsilon_0 \hat{\chi}(\omega) \int_{-\infty}^{\infty} dt' \underline{E}(z, t') e^{i\omega(t'-t)}$$

$$\chi(t-t')$$

$$= \frac{\epsilon_0}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^t dt' \chi(t-t') \underline{E}(z, t')$$

(Nachwirkungseffekt: Faltungintegral)

NB: Kausalität verlangt $\chi(t-t') = 0$ für $t' > t$

Aus mikroskop. Modellen folgt i.a. komplexes $\hat{\chi}(\omega) \in \mathbb{C}$
 \Rightarrow komplexe dielekt. Fkt.

$$\epsilon(\omega) = 1 + \hat{\chi}(\omega) = \epsilon'(\omega) + i\epsilon''(\omega)$$

mit $\epsilon', \epsilon'' \in \mathbb{R}$

Aus $\epsilon(\omega) = 1 + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} dt \chi(t) e^{i\omega t}$ folgt

$$\epsilon^*(\omega) = \epsilon(-\omega) \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \epsilon'(\omega) &= \epsilon'(-\omega) \\ \epsilon''(\omega) &= -\epsilon''(-\omega) \end{aligned}$$

monochromat, ebene Welle $\underline{E}(z, t) = \underline{E}_0 e^{i(kz - \omega t)}$

$$k^2 = \epsilon(\omega) \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 + i \frac{1}{\omega\tau}\right)$$

Isolator (dispersives Dielektrum): $k^2 \approx \epsilon(\omega) \frac{\omega^2}{c^2}$

$$\tilde{n}(\omega) = n(\omega) + i\gamma(\omega)$$

komplex, frequenzabh.
 Brechungsindex mit

$$\tilde{n}(\omega)^2 = \epsilon(\omega) = \epsilon' + i\epsilon''$$

$$\Rightarrow \left. \begin{aligned} \epsilon'(\omega) &= n^2 - \gamma^2 \\ \epsilon''(\omega) &= 2n\gamma \end{aligned} \right\}$$

$$\Rightarrow \left. \begin{aligned} n &= \\ \gamma &= \end{aligned} \right\} \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{\epsilon'^2 + \epsilon''^2} \mp \epsilon' \right)^{1/2}$$

Abs. koeff γ
 reeller Brech. index

(i) Absorption

a) $\epsilon'' = 0 \Rightarrow$ Abs. koeff. $\gamma = 0$
 Brech. ind. $n = \sqrt{\epsilon'}$ } falls $\epsilon' > 0$

b) $\epsilon'' > 0 \Rightarrow \gamma > 0$ (gedämpfte Welle) \Rightarrow ungedämpfte Welle \Rightarrow Energie - dissip. Transparenzgebiet der Substanz (wenig Abs.)

Der Frequenzbereich mit $\epsilon'' \ll \epsilon'$

(ii) Dispersion

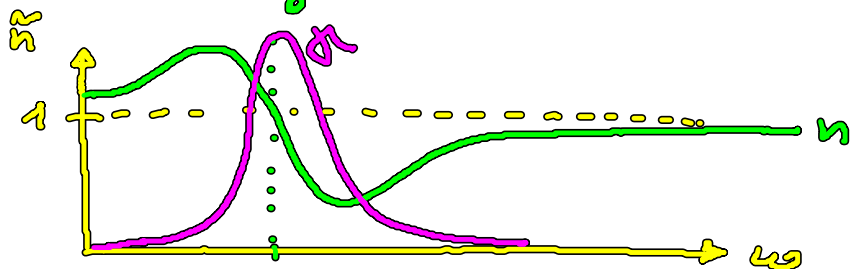
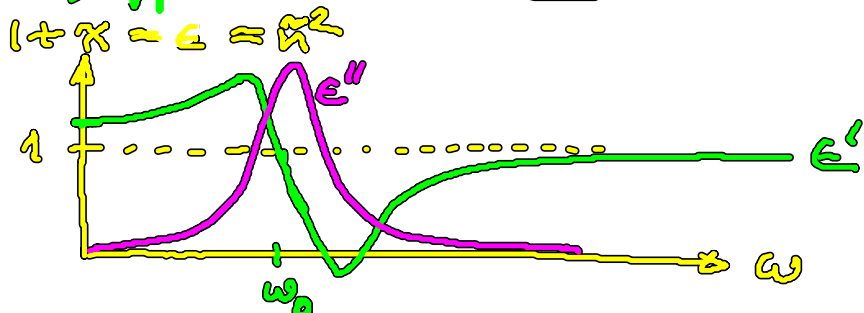
$\text{Re } k \equiv k' = \frac{\omega}{c} n(\omega)$ nichtlin. Dispersion

\Rightarrow Gruppengeschw. $v_g := \frac{d\omega}{dk'} = \frac{1}{\frac{dk'}{d\omega}} = \frac{c}{\frac{d(n\omega)}{d\omega}}$

$$v_g = \frac{c}{n + \omega \frac{dn}{d\omega}} \neq \frac{c}{n(\omega)} = v_{ph}$$

Phasengeschw.

Typ. Frequenzabh. (Resonanzverhalten)



normale Dispersion: $\frac{dn}{d\omega} > 0$

anomale Dispersion: $\frac{dn}{d\omega} < 0$

(stets im Transparenzgebiet $\epsilon'' \approx 0, v_g < v_{ph}$)
 (bei Absorption)

L. Brillouin: Wave Propagation