

6. Relativistische Formulierung der Elektrodynamik

6.1. Ko- und kontravariante Schreibweise der Relativitätstheorie

Grundpostulat der speziellen Relativitätstheorie:

- Kein Inertialsystem ist gegenüber einem anderen ausgezeichnet
- Die Lichtgeschwindigkeit c ist in jedem Inertialsystem gleich (Einstein 1904)

→ Kugelwellen sind

$$\text{Lorentz invariant} \quad r^2 - c^2 t^2 = r'^2 - c^2 t'^2$$

Formalisierung: Der raum-zeitliche Abstand ds

$$(ds)^2 = (cdt)^2 - (d\underline{r})^2 \quad \text{zwischen zwei Ereignissen}$$

bleibt invariant bei Transformation zwischen Inertialsystemen $\Sigma \rightarrow \Sigma'$.

(H.A. Lorentz 1853-1928)

Schreibe $(ds)^2$ als Skalarprodukt von vier Vektoren im Minkowski Raum V

Formalismus der linearen orthogonalen Transformationen, unter denen das ds^2

Skalarprodukt invariant ist.

In der ko / kontravarianten Schreibweise tritt 4-Vektoren in zwei möglichen Versionen auf:

kontravariante Komponente x^i .

$$\begin{cases} x^0 = ct \\ x^1, x^2, x^3 = \text{Comp. des Ortsvektors } \underline{r} \end{cases}$$

kovariante Komponente x_i

$$\begin{cases} x_0 = ct \\ x_\alpha := -x^\alpha \quad \alpha = 1, 2, 3 \end{cases}$$

kovariante Vektor $\underline{\omega} \in \tilde{V}$ dualer Vektorraum zu V

d.h. $\tilde{V} = \{ \text{lin. Funktional: } V \rightarrow \mathbb{R} \}$

$$(ds)^2 = dx^0 dx_0 + dx^1 dx_1 + dx^2 dx_2 + dx^3 dx_3 \\ = dx^i dx_i$$

Physical. Anwendung:

Lorentz-Invarianten lassen sich als Skalarprodukt $a^i a_i$ schreiben!

Beispiel: d'Alembert-Operator

$$\square \equiv \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} = - \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x_i} = - \partial_i \partial^i$$

NB: $\frac{\partial}{\partial x^i}$ transformiert sich bei Lorentz Trafo kovariant

• 4-geschwindigkeit

$$u^i := \frac{dx^i}{ds}$$



$$\text{mit } ds = (dx^i dx_i)^{1/2} \\ = c(1 - \beta^2)^{1/2} dt \\ = \frac{c}{\gamma} dt$$

$$\beta := \frac{v}{c} \\ \gamma := \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

$$u^i u_i = \frac{dx^i dx_i}{(ds)^2} = 1$$

$$u^0 = \gamma$$

$$u^\alpha = \frac{\gamma}{c} v^\alpha$$

$$v^\alpha := \frac{dx^\alpha}{dt}$$

Phys. Interpretation: $u^\alpha = \frac{1}{c} \frac{dx^\alpha}{d\tau}$

$$d\tau := \frac{dt}{\gamma} \quad \uparrow \text{Eigenzeit}$$

• 4-Impuls

$$p^i := m_0 c u^i \quad \text{mit Ruhemasse } m_0$$



$$p^i p_i = m_0^2 c^2 \underbrace{u^i u_i}_1 = m_0^2 c^2$$

$$p^0 = m_0 \gamma c = m(v) c$$

$$p^\alpha = m_0 \gamma v^\alpha = m(v) v^\alpha$$

$$E^2 = m_0^2 c^4 + c^2 p^2, \quad \text{Energie } E = m(v) c^2$$

Analoge Def. von Tensoren 2. Stufe:

$$A^{ilz}, A^i_k, A_i^k, A_{ik}$$

$$\text{mit } A^{00} = A^0_0 = A_0^0 = A_{00}$$

$$A^{10} = A^1_0 = -A_1^0 = -A_{10}$$

$$A^{11} = -A_1^1 = -A^1_1 = A_{11}$$

Minkowski Tensor

$$g^{ik} := \delta^{ik} = \left\{ \begin{array}{l} \delta^i_k \quad \text{für } k=0 \\ -\delta^i_k \quad \text{für } k=1,2,3 \end{array} \right\} = g_{ik} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$$

"Heben oder Senken der Indizes" durch g^{ik} : $g^{ik} a_k = a^i$

$$\Rightarrow (ds)^2 = g^{ik} dx_i dx_k = g_{ik} dx^i dx^k$$

Lorentz-Transformation (linear, homogen): $\Sigma \rightarrow \Sigma'$

$$x'^i = U^i_k x^k \quad \text{mit} \quad U^i_k = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{für} \quad v \ll c$$

U ist orthogonale Trafo: $U^T U = \underline{1} \Leftrightarrow \underbrace{(U^T)^i_k}_{U_i^k} U^i_j = \delta^j_k$

$$\Rightarrow a'^i b'_i = U^i_k U_i^l a^k b_l = a^i b_i$$

Skalarprodukt ist invariant.

Umkehr-Trafo $x^i = U_k^i x'^k$

$$U_k^i = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & \underline{1} \end{pmatrix}$$

6.2. Transformation der Ströme und Felder

Ziel: ko- / kontravariante Schreibweise der Elektrodynamik im Vakuum

Grund: Die klassische Elektrodynamik ist eine Lorentz-invariante Theorie!

Ladungserhaltung

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \underline{j} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_{\alpha=1}^3 \partial_{\alpha} j^{\alpha} = 0$$

In 4-Schreibweise

$$\partial_{\mu} j^{\mu} = 0$$

$$j^{\mu} = (\rho, \underline{j})$$

4-Stromdichte

Forderung: Ladungserhaltung soll in allen Inertialsystemen gelten

→ j^{μ} muss sich wie ein 4-Vektor transformieren, damit das Skalarprodukt $\partial_{\mu} j^{\mu}$ Lorentzinvariant ist.:

$$x^{10} = \gamma (x^0 - \beta x^1) \quad t' = \gamma \left(t - \frac{v}{c^2} x^1 \right)$$

$$x^{11} = \gamma (x^1 - \beta x^0) \quad \text{bzw. } x^{11} = \gamma (x^1 - vt)$$

$$x^{12} = x^2$$

$$x^{13} = x^3$$

Also gilt für Ladungs- u. Stromdichten

$$j'^{10} = \gamma (j^0 - \beta j^1) \quad \text{bzw. } \rho' = \gamma \left(\rho - \frac{v}{c^2} j^1 \right)$$

$$j'^{11} = \gamma (j^1 - \beta j^0) \quad \text{bzw. } j'^1 = \gamma (j^1 - v \rho)$$

4 - Potentiale

Die Potentiale ϕ, A sind Lösungen der

Wellengleichungen (Lorenz-Eichung)

$$\square \phi = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho$$

$$\square = -\partial_k \partial^k$$

$$\square \underline{A} = \underline{j}$$

$$\mu_0 c = \frac{1}{\epsilon_0 c} \implies$$

$$\partial_k \partial^k \phi = \frac{1}{\epsilon_0 c} \dot{j}^0$$

$$\partial_k \partial^k c A^\alpha = \frac{1}{\epsilon_0 c} \dot{j}^\alpha$$

Also

$$\partial_k \partial^k \phi^i = \frac{1}{\epsilon_0 c} \dot{j}^i$$

mit $\phi^0 := \phi$

$\phi^\alpha := c A^\alpha \quad \alpha = 1, 2, 3$

Da \dot{j}^i 4-Vektor ist, muss sich auch ϕ^i wie ein 4-Vektor transformieren, da $\partial_k \partial^k$ Lorentz-invariant ist.

$$\phi'^0 = \gamma (\phi^0 - \beta \phi^1)$$

bzw. $\phi' = \gamma (\phi - v A^1)$

$$\phi'^1 = \gamma (\phi^1 - \beta \phi^0)$$

bzw. $A'^1 = \gamma (A^1 - \frac{v}{c^2} \phi)$

Lorenz-Eichung

$$\underline{\nabla} \underline{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \phi = 0$$

$$\iff \partial_c \phi^c = 0$$

Lorentz-invariant!

Umzeichnung

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\underline{A}} &= \underline{A} + \underline{\nabla} F \\ \phi &= \phi - \frac{\partial}{\partial t} F \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned} c\tilde{A}^\alpha &= cA^\alpha + \partial_\alpha cF \\ &= cA^\alpha - \partial^\alpha cF \end{aligned}$$

$$\tilde{\phi}^0 = \phi^0 - \partial_0 cF = \phi^0 - \partial_c F$$

Also: $\boxed{\tilde{\phi}^i = \phi^i + \partial^i \psi}$

mit bel. Lorentz invarianten
skalarem Feld $\psi(x^\mu)$

Felder $\underline{E}, \underline{B}$

$$\underline{E} = -\underline{\nabla} \phi - \frac{\partial}{\partial t} \underline{A}$$

$$\Rightarrow E^\alpha = -\partial_\alpha \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} cA^\alpha = -\partial_\alpha \phi^0 - \partial_0 \phi^\alpha = \partial^\alpha \phi^0 - \partial^0 \phi^\alpha$$

$$\underline{B} = \underline{\nabla} \times \underline{A}$$

$$cB^1 = \partial_2 cA^3 - \partial_3 cA^2 = \partial_2 \phi^3 - \partial_3 \phi^2 = \partial^3 \phi^2 - \partial^2 \phi^3$$

zyklische Vertauschung

$$cB^2 = \partial^1 \phi^3 - \partial^3 \phi^1$$

$$cB^3 = \partial^2 \phi^1 - \partial^1 \phi^2$$

Zusammenfassung durch antisymmetrischen Feldtensor

$$F^{ik} := \partial^i \phi^k - \partial^k \phi^i$$

$$F^{ik} = -F^{ki}$$

$$F^{ik} = \begin{pmatrix} 0 & -E^1 & -E^2 & -E^3 \\ E^1 & 0 & -cB^3 & cB^2 \\ E^2 & cB^3 & 0 & -cB^1 \\ E^3 & -cB^2 & cB^1 & 0 \end{pmatrix}$$

wegen Antisymmetrie
hat F^{ik} nur 6 unabh.
hängige Komponenten: