Viererstromdichte $j^i := (c\varrho, \underline{j})$ $\quad i = 0,1,2,3$

Viererpotenzial $\phi^i := (\phi, c\underline{A})$

Lorentz-Trafo $U^i{}_k = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad \beta = \frac{v}{c}$, $\quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$

<u>antisymm. Feldtensor</u> $F^{ik} := \partial^i \phi^k - \partial^k \phi^i = -F^{ki}$

$$F^{ik} = \begin{pmatrix} 0 & -E^1 & -E^2 & -E^3 \\ E^1 & 0 & -cB^3 & cB^2 \\ E^2 & cB^3 & 0 & -cB^1 \\ E^3 & -cB^2 & cB^1 & 0 \end{pmatrix}$$

<u>Lorentz-Trafo der Felder</u>

Als Tensor 2. Stufe transformiert sich F^{ik} wie $F'^{ik} = U^i{}_l U^k{}_m F^{lm}$

Im einzelnen:

$$E'^1 = F'^{10} = U^1{}_l U^0{}_m F^{lm} = -\beta\gamma U^0{}_m F^{0m} + \gamma U^0{}_m F^{1m}$$

$$= (\beta\gamma)^2 \underbrace{F^{01}}_{=-F^{10}} + (\gamma)^2 F^{10}$$

$$= \underbrace{\gamma^2(1-\beta^2)}_{1} F^{10} = E^1$$

$$E'^2 = F'^{20} = U^2{}_l U^0{}_m F^{lm} = U^0{}_m F^{2m} = \gamma F^{20} - \beta\gamma F^{21}$$

$$= \gamma(E^2 - vB^3)$$

$$E'^3 = F'^{30} = U^0{}_m F^{3m} = \gamma F^{30} - \beta\gamma F^{31}$$
$$= \gamma (E^3 + v B^2)$$
$$B'^1 = \frac{1}{c} F'^{32} = \frac{1}{c} U^3{}_l U^2{}_m F^{lm} = \frac{1}{c} F^{32} = B^1$$
$$B'^2 = \frac{1}{c} F'^{13} = \frac{1}{c} U^1{}_l U^3{}_m F^{lm} = \frac{1}{c} U^1_l F^{l3} = \gamma (B^2 + \frac{v}{c^2} E^3)$$
$$B'^3 = \gamma (B^3 - \frac{v}{c^2} E^2)$$

Zus. fassung

$$\boxed{\begin{array}{ll} E'^1 = E^1 & B'^1 = B^1 \\ E'^2 = \gamma (E^2 - v B^3) & B'^2 = \gamma (B^2 + \frac{v}{c^2} E^3) \\ E'^3 = \gamma (E^3 + v B^2) & B'^3 = \gamma (B^3 - \frac{v}{c^2} E^2) \end{array}}$$

Elektr. $\longleftrightarrow$ magn. Felder

Umeichung

$$\tilde{\phi}^i = \phi^i + \partial^i \varphi \qquad \text{Eich flkt. } \varphi \text{ (Lorentz-Skalar)}$$
$$\Rightarrow \tilde{F}^{ik} = \partial^i \tilde{\phi}^k - \partial^k \tilde{\phi}^i = \partial^i (\phi^k + \partial^k \varphi) - \partial^k (\phi^i + \partial^i \varphi)$$
$$= \underbrace{\partial^i \phi^k - \partial^k \phi^i}_{= F^{ik}} + \underbrace{\partial^i \partial^k \varphi - \partial^k \partial^i \varphi}_{= 0} = F^{ik}$$

F^{ik} ist eichinvariant!

Homogene Maxwell-Gleichungen

$$(1) \quad \underline{\nabla} \cdot \underline{B} = \partial_1 B^1 + \partial_2 B^2 + \partial_3 B^3 = 0$$
$$\Rightarrow \partial_1 F^{32} + \partial_2 F^{13} + \partial_3 F^{21} = 0$$

mit $\partial_1 = -\partial^1, \ \ldots \quad F^{32} = -F^{23}$ folgt

$$\boxed{\partial^1 F^{23} + \partial^2 F^{31} + \partial^3 F^{12} = 0} \quad \text{zykl (123)}$$

(2) $\underline{\nabla} \times \underline{E} + \frac{\partial}{\partial t}\underline{B} = 0$

1. Komp.: $\partial_2 E^3 - \partial_3 E^2 + \frac{\partial}{\partial t} B^1 = 0$

$$\Rightarrow \partial_2 F^{30} - \partial_3 F^{20} + \partial_0 F^{32} = 0$$

mit $\partial_0 = \partial^0$, $\partial_2 = -\partial^2$, $\partial_3 = -\partial^3$, $F^{32} = -F^{23}$, $F^{20} = -F^{02}$:

$$\boxed{\partial^0 F^{23} + \partial^2 F^{30} + \partial^3 F^{02} = 0} \quad \text{zykl. } (023)$$

zykl. Permutation $1 \to 2 \to 3 \to 1$ mit $F^{ik} = -F^{ki}$

$$\boxed{\begin{array}{l} \partial^0 F^{13} + \partial^3 F^{01} + \partial^1 F^{30} = 0 \\ \partial^0 F^{12} + \partial^1 F^{20} + \partial^2 F^{01} = 0 \end{array}} \quad \begin{array}{l} \text{zykl. } (013) \\ \text{zykl. } (012) \end{array}$$

Zus.fassung der homog. Maxwellgln.:

$$\boxed{\epsilon_{iklm} \partial^k F^{lm} = 0} \quad \text{oder} \quad \boxed{\epsilon^{iklm} \partial_k F_{lm} = 0} \text{ „4-Rotat."}$$

mit
$$\epsilon^{iklm} = \begin{cases} 1 & \text{wenn } (iklm) = \text{gerade Permutation von } (0123) \\ -1 & \text{wenn } (iklm) = \text{ungerade Perm.} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

4-dim.
Levi-Civita-Tensor

(Rot. eines 3-Vektors $(\underline{\nabla} \times \underline{a})_i = \epsilon^{ikl} \partial_k a_l$)

Pseudovektor = axialer Vektor

<u>Bem.</u>: (i) ϵ^{iklm} ist total antisymm.

(ii) ϵ^{iklm} transformiert sich unter Lorentz-Trafo wie ein <u>Pseudotensor</u>

$$\epsilon'^{iklm} = \underbrace{(\det U)}_{\pm 1} U^i{}_n U^k{}_p U^l{}_q U^m{}_r \epsilon^{npqr}$$

damit $\epsilon'^{iklm} = \epsilon^{iklm}$!

Inhomog. Maxwell-Gln. (im Vakuum)

(3) $\epsilon_0 \underline{\nabla} \cdot \underline{E} = \varrho$

$$\partial_1 E^1 + \partial_2 E^2 + \partial_3 E^3 = \frac{1}{\epsilon_0 c} c\varrho$$

$$\underset{=0}{\partial_0 F^{00}} + \partial_1 F^{10} + \partial_2 F^{20} + \partial_3 F^{30} = \frac{1}{\epsilon_0 c} j^0$$

$$\boxed{\partial_i F^{i0} = \frac{1}{\epsilon_0 c} j^0}$$

(4) $\underline{\nabla} \times \underline{B} = \mu_0 \underline{j} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \underline{E}$

1. Komp.: $\partial_2 B^3 - \partial_3 B^2 = \mu_0 j^1 + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} E^1 \quad | \cdot c$

$\mu_0 c = \frac{1}{\epsilon_0 c}$: $\partial_2 F^{21} - \partial_3 F^{13} = \frac{1}{\epsilon_0 c} j^1 + \partial_0 F^{10}$

$$\underset{=0}{\partial_1 F^{11}} + \partial_0 F^{01} + \partial_2 F^{21} + \partial_3 F^{31} = \frac{1}{\epsilon_0 c} j^1$$

$$\boxed{\partial_i F^{i1} = \frac{1}{\epsilon_0 c} j^1}$$

analog für 2. u. 3. Komp.!

Zus.fassung der <u>inhomog. Maxwellgln.</u>:

$$\boxed{\partial_i F^{ik} = \frac{1}{\epsilon_0 c} j^k}$$ „<u>4-Divergenz</u>"

<u>Bem.</u>: (i) Die homog. Maxwell-Gln. sind durch den Potenzialansatz

$$F_{lm} = \partial_l \phi_m - \partial_m \phi_l$$

automatisch erfüllt:

$$\epsilon^{iklm} \partial_k F_{lm} = \underbrace{\epsilon^{iklm} \partial_k \partial_l \phi_m}_{} - \underbrace{\epsilon^{iklm} \partial_k \partial_m \phi_l}_{} = 0$$

$$=0 \qquad\qquad\qquad =0$$

$(k \leftrightarrow l)$

$$\epsilon^{iklm}\partial_k\partial_l\phi_m = -\epsilon^{ilkm}\partial_l\partial_k\phi_m$$

wegen Antisymm. von ϵ^{iklm} $= -\epsilon^{iklm}\partial_k\partial_l\phi_m$

(ii) Aus den inhomog. Maxwell-Gln.

$$\partial_i F^{ik} = \partial_i\partial^i\phi^k - \underline{\partial_i\partial^k\phi^i} = \frac{1}{\epsilon_0 c} j^k$$

folgt mit der Lorenz-Eichung $\partial_i\phi^i = 0$:

$$\underline{\partial_i\partial^k\phi^i} = \partial^k \underbrace{\partial_i\phi^i}_{0} = 0$$

also

$$\boxed{\partial_i\partial^i\phi^k = \frac{1}{\epsilon_0 c} j^k}$$ inhomog. Wellengl.

(iii) Die Maxwell-Gln.

$$\boxed{\begin{aligned} \epsilon^{iklm}\partial_k F_{lm} &= 0 \\ \partial_i F^{ik} &= \frac{1}{\epsilon_0 c} j^k \end{aligned}}$$

sind <u>Lorentz-kovariant</u>, weil sie durch 4-Vektoren ausgedrückt sind (Pseudo-4-Vektor stört nicht, da rechte Seite $=0$