Eichinvarianz und Ladungserhaltung

$$\tilde{\phi}^i = \phi^i + \partial^i \varphi$$

$$\tilde{W}_{tf} = -\frac{1}{c^2}\int_\Omega d\Omega\, j_i \tilde{\phi}^i = -\frac{1}{c^2}\int_\Omega d\Omega\, j_i\left(\phi^i + \partial^i\varphi\right)$$

$$= W_{tf} - \frac{1}{c^2}\int_\Omega d\Omega\, \underbrace{j_i \partial^i \varphi}_{\partial^i(\varphi j_i) - \varphi(\partial^i j_i)}$$

$$= W_{tf} - \frac{1}{c^2}\underbrace{\int_\Omega d\Omega\, \partial^i(\varphi j_i)}_{\int d^3r\, c\underbrace{\int_{t_1}^{t_2} dt\, \frac{\partial}{c\,\partial t}(\varphi c \rho)}_{[\varphi\rho]_{t_1}^{t_2}} - c\int_{t_1}^{t_2} dt \underbrace{\int d^3r\, \nabla\cdot(\varphi \mathbf{j})}_{\oint d\mathbf{f}\,\varphi \mathbf{j} = 0}} + \frac{1}{c^2}\int_\Omega d\Omega\, \varphi\left(\partial^i j_i\right)$$

weglassen, da Variation bei t_1, t_2 verschwindet $\leftarrow [\varphi\rho]_{t_1}^{t_2}$

$$\Rightarrow \tilde{W}_{tf} = W_{tf} + \frac{1}{c^2}\int_\Omega d\Omega\, \varphi \underbrace{\left(\partial^i j_i\right)}_{=0 \text{ wegen Ladungserhaltung}}$$

Fazit: Äquivalenz zwischen Eichinvarianz $\tilde{W}_{tf} = W_{tf}$ und Ladungserhaltung $\partial^i j_i = 0$

6.5 Herleitung der inhomogenen Maxwell-Gleichungen aus dem Wirkungsprinzip

Die Beweg. gl. für ein Teilchen im Feld F^{ik}

$$\frac{d}{ds}p^i = \frac{q}{c}F^{ik}u_k$$

sowie die homog. Maxwellgln.

$$\epsilon_{iklm}\partial^k F^{lm} = 0 \qquad (\text{wegen } F^{lm} = \partial^l\phi^m - \partial^m\phi^l)$$

ergeben sich aus den Wirkungsintegralen

$$W_t + W_{tf} = \int_\Omega d\Omega \left\{ -\underbrace{\mu\frac{d\sigma}{dt}}_{\text{Teilchen}} - \underbrace{\frac{1}{c^2}j_i\phi^i}_{\text{Teilchen-Feld-WW}} \right\}$$

durch Var. der Bahn bei geg. Potenzialen $\phi^i(x^j)$.

Vermutung: Erzeugung von Feldern durch Ladungen (inhom. Maxwell-gln.) ergeben sich durch Variation der Felder bzw. Potenziale bei geg. Bahnen.

Frage: Lagrangedichte $\mathcal{L}_f$ zur Beschreibung der Dynamik der Felder?

Ansatz: $W_f = \int_\Omega d\Omega\, \mathcal{L}(F^{ik}, \phi^i)$

Forderungen: (i) Feldgl. linear $\Rightarrow \mathcal{L}$ bilinear in F^{ik}, ϕ^i

(ii) Eindeutige Determinierung durch F^{ik} $\Rightarrow$ keine Ableitung $\partial^{\ell} F^{ik}$

(iii) Eichinvarianz $\Rightarrow$ $\phi^i \phi_i$ darf nicht auftreten

(iv) Lorentzinvarianz

$$\Rightarrow \quad \mathcal{L} = -\alpha F^{ik} F_{ik}$$

$$\Rightarrow \boxed{W = \int d\Omega \left\{ \underbrace{- r \frac{ds}{dt}}_{W_t} \underbrace{- \frac{1}{c^2} j_i \phi^i}_{W_{tf}} \underbrace{- \alpha F^{ik} F_{ik}}_{W_f} \right\}}$$

Variation für feste Bahn (d.h. feste j_i)

$$\delta W = \int d\Omega \left\{ - \frac{1}{c^2} \underbrace{j_i \delta\phi^i}_{j^i \delta\phi_i} - \alpha \underbrace{\delta (F^{ik} F_{ik})}_{\underbrace{\underbrace{(\delta F^{ik}) F_{ik}}_{(\delta F_{ik}) F^{ik}} + F^{ik} \delta F_{ik}}_{2 F^{ik} \delta F_{ik}}} \right\}$$

$$\delta F_{ik} = \delta (\partial_i \phi_k - \partial_k \phi_i)$$
$$= \partial_i \delta\phi_k - \partial_k \delta\phi_i$$

$$2 F^{ik} \delta F_{ik} = \underbrace{2 F^{ik} \partial_i \delta\phi_k}_{2 \underbrace{F^{ki}}_{-F^{ik}} \partial_k \delta\phi_i} - 2 F^{ik} \partial_k \delta\phi_i = -4 F^{ik} \partial_k \delta\phi_i$$

$$\Rightarrow \delta W = \int d\Omega \left\{ -\frac{1}{c^2} j^i \delta\phi_i + 4\alpha F^{ik}\partial_k \delta\phi_i \right\}$$

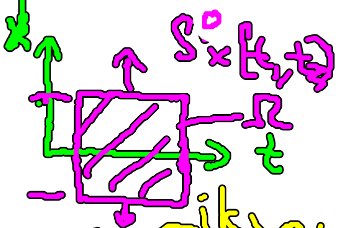
verallg. Gaußscher Satz (in 4 Dim.)

$$\int_\Omega d\Omega\, \partial_k \left(F^{ik}\delta\phi_i\right) = \int_{\partial\Omega} df_k\, F^{ik}\delta\phi_i = 0$$

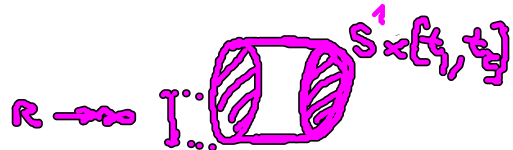
$$(\Omega = \mathbb{R}^3 \times [t_1, t_2])$$

$$F^{ik} \to 0 \quad x^\alpha \to 0$$

$$\delta\phi_i \Big|_{t_1, t_2} = 0$$



$$\int d\Omega\, F^{ik}\partial_k \delta\phi_i = \underbrace{\int d\Omega\, \partial_k\left(F^{ik}\delta\phi_i\right)}_{0} - \int d\Omega \left(\partial_k F^{ik}\right)\delta\phi_i$$



also

$$\delta W = \int_\Omega d\Omega \left\{ -\frac{1}{c^2} j^i - 4\alpha\left(\partial_k F^{ik}\right)\right\}\delta\phi_i = 0 \quad \text{für bel. } \delta\phi_i$$

$$\Rightarrow \quad \partial_k F^{ik} = -\frac{1}{4\alpha c^2} j^i$$

$$\partial_k F^{ki} = \frac{1}{4\alpha c^2} j^i$$

Wahl der Einheiten: $\alpha = \frac{\varepsilon_0}{4c}$:

$$\boxed{\partial_i F^{ik} = \frac{1}{\varepsilon_0 c} j^k}$$ inhomog. Maxwell-Gln.