24/4/2008

24/4/2008

n-ten Einheitswurzel

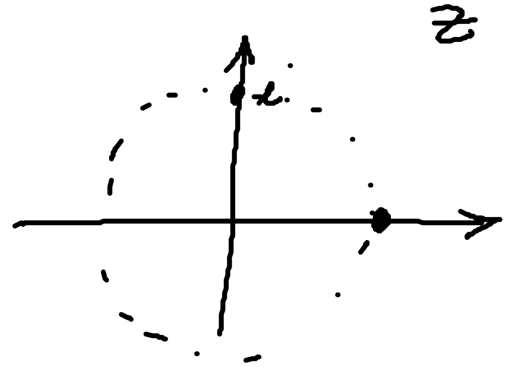
$z = x + iy = re^{i\theta}$

$z^n = 1$, $|\,| = |z^n| = |z|^n = 1$

$\Rightarrow |z| = 1 \Rightarrow z = 1 \cdot e^{i\theta}$, denn

$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$, $|e^{i\theta}| = \underline{1}$

also $\quad e^{i\theta \cdot n} = \underline{1}$



$e^{i0} = 1$

$e^{i\frac{\pi}{2}} = i$

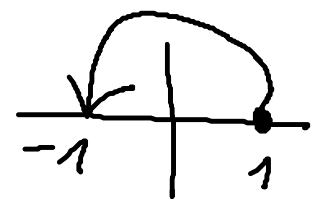
$\vdots$

$e^{2\pi i} = 1 \quad ; \quad e^{2\pi \cdot k \cdot i} = 1, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$

Vergleiche mit $\quad e^{i\theta n} = \underline{1}$

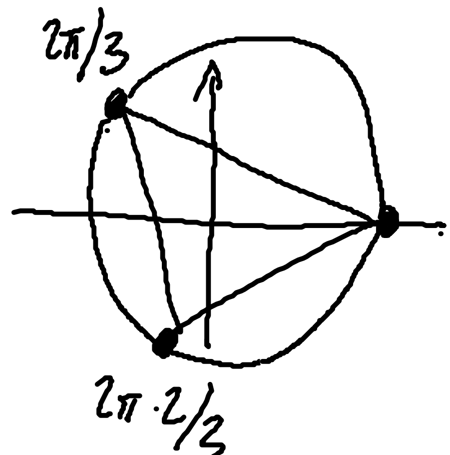
$$\Rightarrow \quad \boxed{\theta = \frac{1}{n} \cdot 2\pi k}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots n-1$$

Beispiel $\quad n = 2 \quad : \quad z^2 = 1$



$$\theta = 0 \quad \text{und} \quad \theta = \pi$$

$n = 3 \quad : \quad z^3 = 1$



$\theta = 0 \quad \text{und} \quad \frac{1}{3} \cdot 2\pi \cdot 1$

$\text{und} \quad \frac{1}{3} \cdot 2\pi \cdot 2$

(und $\frac{1}{3} \cdot 2\pi \cdot 3$, keine neue Lösung)

II Gewöhnliche Differentialgleichungen

$$x(t)$$

$$v(t) = \dot{x}(t).$$

$$m\,\ddot{\underline{x}}(t) = \underline{F}(\underline{x}(t))$$ Newton'sche Bewegungsgleichungen

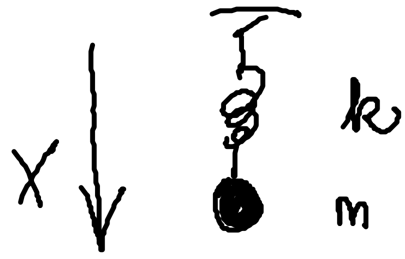
$$\underline{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$$

Ortsvektor

Klassifizierung:

- gewöhnliche DGL für Funktionen einer Variablen, z.B. Ort $\underline{r}(t)$ als Fkt der Zeit: t ist die Variable.
- partielle DGL für Funktionen mehrerer Variablen, z.B. Wellenfkt $\Psi(x, y, z; t)$

__Beispiel__: eindimensionaler harmonischer Oszillator



Federkonstante (Young-Modul)

$$m\ddot{x}(t) = -k\,x(t), \quad k>0$$

Hooke'sche Gesetz

Standard form

$$\boxed{\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) = 0} \qquad \omega^2 \equiv \frac{k}{m}$$

- Ordnung der DGL: höchste auftretende Ableitung.

Beispiele: Funktionen $y = y(x)$

$$y''(x) + \omega^2 y(x) = 0$$

2. Ordnung.

$$y'''(x) + 4\sin 2y(x) = 4x$$

3. Ordnung

- Lineare Differentialgleichungen:

  $y, y', y'' \dots$ etc tauchen nur in erster Potenz auf. Beispiel: $y'' + 2y' = 4x$

  $$y''' + y' = \sin x$$

⇒ Nicht lineare Differentialgleichungen

z.B. $y'' + e^{2xy} = 1$

- Explizit gegeben, z.B. $y'(x) = f(x,y)$

  implizit gegeben, z.B. $e^{y'(x)} = y \sin(y'')$

- \- Einzelne DGL $y'(x) + 2y(x) = 0$

  \- Systeme von DGL

  $$y_1'(x) + 2y_2(x) = 3x$$
  $$y_2'(x) + 3y_1(x) = 4$$
  $$y_3'(x) + y_1 y_2 = \sin x$$

Literatur: W. Walter 'Gewöhnliche Differentialgleichungen' (Springer)

⇒ Bronstein 'Taschenbuch der Mathematik'.

2.2. DGL erster Ordnung

Explizite Form

$$y'(x) = f(x, y)$$

Hierbei ist $f(x,y)$ fest vorgegeben.

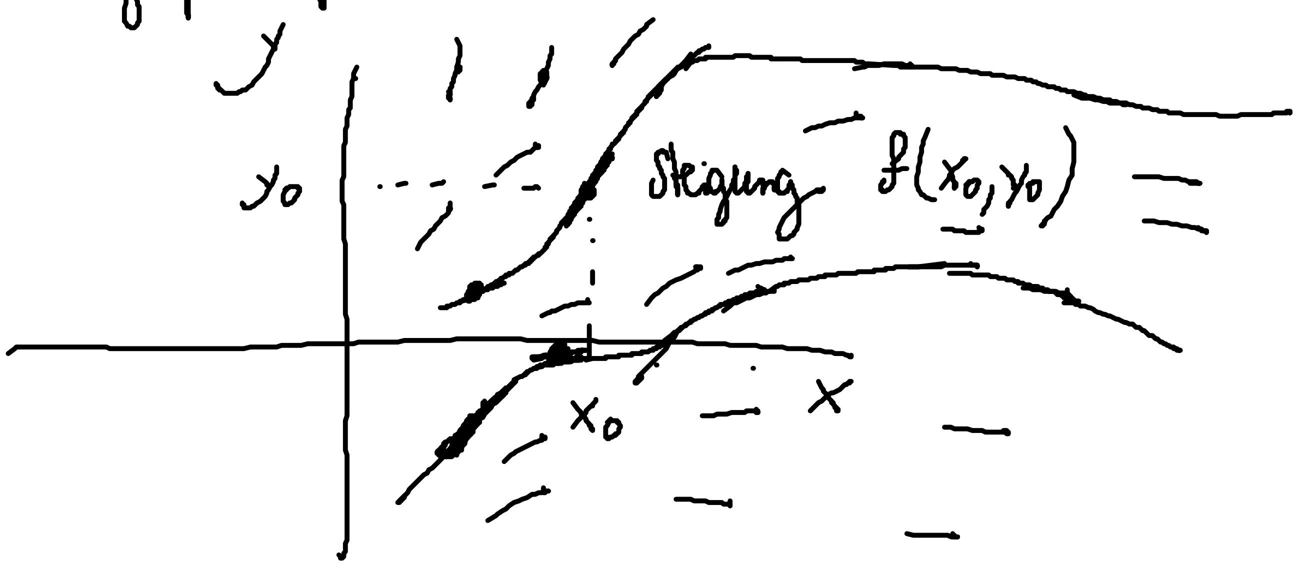
Aufgabe: Bestimme $y(x)$, so dass

$$y'(x) = f(x, y(x)).$$

Beispiel: $\quad y'(x) = x^2 + 2\sin(xy)$.

2.2.1. Richtungsfeld und Anfangswertproblem.

Richtungsfeld für $y'(x) = f(x, y)$.



Lösung $y(x)$ hängt ab von der Anfangsbedingung.

2.2.2 Methoden 1: Direkte Integration

$$y'(x) = f(x)$$

$$y'(x) = x^3 + \cos x \Rightarrow y(x) = \frac{1}{4}x^4 + \sin x + c$$

mit unbestimmter Konstante c, die dann durch die AB festgelegt wird,

$$y(x_0) = y_0 \Rightarrow y_0 = \frac{1}{4}x_0^4 + \sin x_0 + c$$

$$\Rightarrow c.$$

2.2.3. Methoden 2: Trennung der Variablen

$$y'(x) = f(x) \cdot g(y) \qquad \text{Produktform}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y) \quad \Big/ \frac{1}{g(y)} \cdot dx$$

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x) \cdot dx \qquad \text{Integration}$$

Beispiel: $\quad y'(x) = e^{y(x)} \sin(x)$

$$\Longleftrightarrow \frac{dy}{e^y} = \sin x \, dx$$

$$\Longleftrightarrow \int e^{-y} dy = \int \sin x \, dx$$

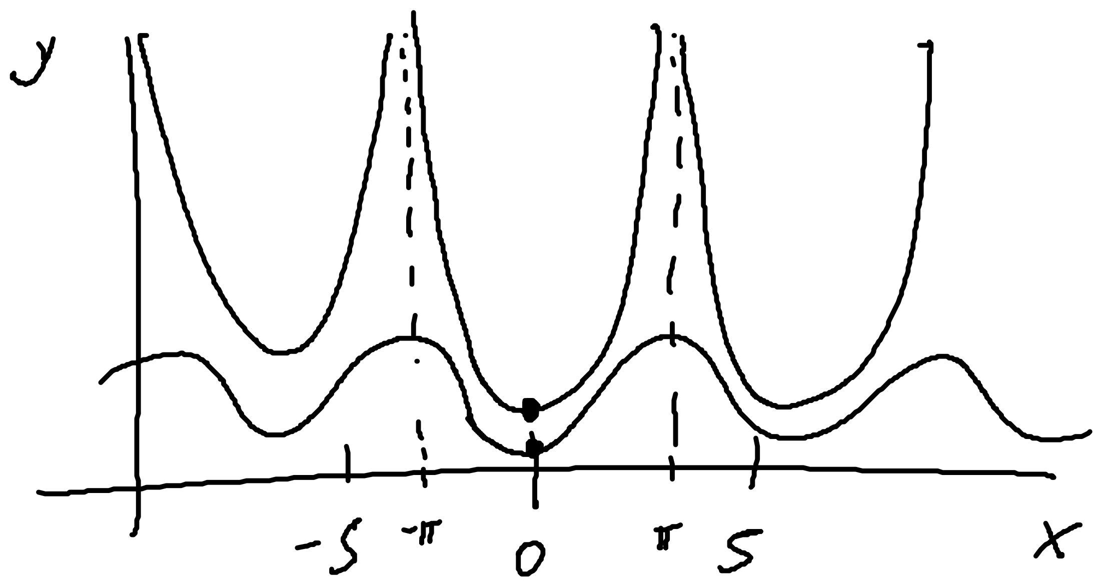
$\log = \ln$

$$\Longleftrightarrow -e^{-y} = -\cos x - c$$

$$e^{-y} = \cos x + c$$

$$-y = \log(\cos x + c)$$

$$y(x) = -\ln(\cos x + c).$$



$c = 1$

$c = 1.5$

starke Abhängigkeit von den AB!

2.2.4 Lineare DGL

Diese hat die Form

$$L[x(t)] \equiv \dot{x}(t) + g(t)x(t) = f(t)$$

mit $g(t)$, $f(t)$ fest vorgegeben.

Aufgabe: Bestimme $x(t)$.

Fall $\cdot$ $f(t) \equiv 0$: homogene DGL

$f(t) \neq 0$: inhomogene DGL

Beispiel: Teilchen der Masse m in z-Richtung)

Reibungskraft $= -\gamma \dot{z}(t)$

$$m \ddot{z}(t) = -\gamma \dot{z}(t) + f(t)$$

$$\left.\begin{aligned} v(t) &= \dot{z}(t) \\ \dot{v}(t) &= \ddot{z}(t) \end{aligned}\right\} \quad \dot{v}(t) + \frac{\gamma}{m} v(t) = \frac{1}{m} f(t)$$

Lösung für $f = 0$: $\quad \dot{v}(t) + \frac{\gamma}{m} v(t) = 0$

$$dv = -\frac{\gamma}{m} v \, dt$$

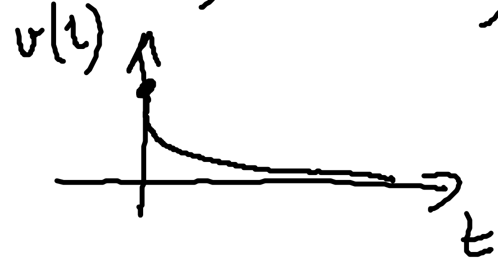
$$\int \frac{dv}{v} = -\int \frac{\gamma}{m} dt$$

$$\ln v = -\frac{\gamma}{m} t + c \Rightarrow v = e^{-\frac{\gamma}{m} t + c}$$

$$= e^{-\frac{\gamma}{m} t} \underline{e^{c}}$$

$$\Rightarrow v(t) = C e^{-\frac{\gamma}{m}t}$$

Lösung $\quad v(t) = v(t=0)\, e^{-\frac{\gamma}{m}\cdot t}$



Allgemeiner Fall: für $f \equiv 0$

$$\dot{x}(t) + g(t)\,x(t) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{x} = -g(t)\,dt \rightarrow \ln x + c = -\int g(t)\,dt$$

Lösung $\quad x_h(t;t_0) \equiv e^{-\int_{t_0}^{t} dt'\, g(t')}$

für die AB $x_h = 1$, denn

$$x_h(t_0;t_0) = 1$$

$$\frac{d}{dt} x_h(t;t_0) = -g(t)\, e^{-\int_{t_0}^{t} dt'\, g(t')}$$

$$= -g(t)\, x_h(t;t_0).$$

Merke:

$$\frac{d}{dt}\int_{t_0}^{t} dt'\, g(t') = g(t)$$

(Hauptsatz der Integralrechnung)

- Lösung für den inhomogenen Fall

$$\dot{x}(t) + g(t)\,x(t) = f(t).$$

Eine spezielle Lösung der DGL ist gegeben durch

$$x_s(t;t_0) = \int_{t_0}^{t} f(t')\, x_h(t,t')\, dt',$$

denn

$$\frac{d}{dt} x_s(t;t_0) = f(t)\, x_h(t,t'=t) + \int_{t_0}^{t} f(t') \frac{d}{dt} x_h(t,t')\, dt'$$

$$= f(t) + \int_{t_0}^{t} f(t') \underbrace{(-g(t))}\, x_h(t,t')\, dt'$$

$$= f(t) - g(t) \underbrace{\int_{t_0}^{t} f(t')\, x_h(t,t')\, dt'}_{x_s(t,t_0)}$$

$$= f(t) - g(t)\, x_s(t,t_0),$$ d.h.

$$\dot{x}_s(t,t_0) + g(t)\, x_s(t,t_0) = f(t).$$