

24/4/2008

24/4/2008

n-ten Einheitswurzel

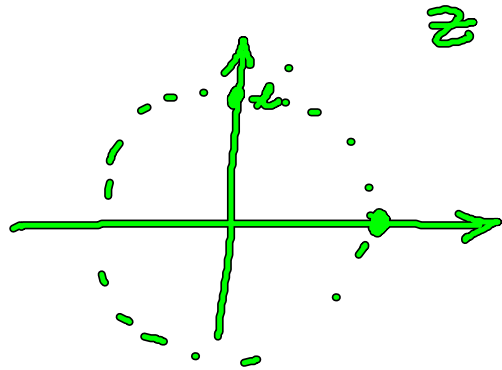
$$z = x + iy = r e^{i\theta}$$

$$z^n = 1, \quad |1| = |z^n| = |z|^n = 1$$

$$\Rightarrow |z| = 1 \Rightarrow z = 1 \cdot e^{i\theta}, \quad \text{denn}$$

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta, \quad |e^{i\theta}| = 1$$

also $e^{i\theta \cdot n} = 1$



$$e^{i0} = 1$$

$$e^{i\frac{\pi}{2}} = i$$

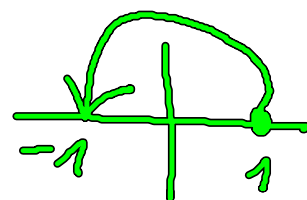
$$e^{2\pi i} = 1 ; e^{2\pi \cdot k \cdot i} = 1, \quad k=0,1,2,\dots$$

Vergleiche mit $e^{i\theta n} = 1$

$$\Rightarrow \boxed{\theta = \frac{1}{n} \cdot 2\pi k},$$

$$k = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

Beispiel $n=2$: $z^2 = 1$



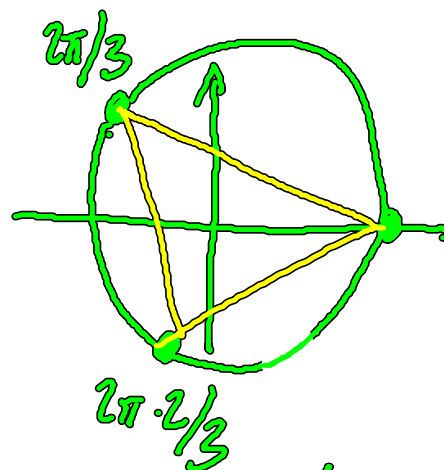
$$\theta = 0 \quad \text{und} \quad \theta = \pi$$

$$n=3 : z^3 = 1$$

$$\theta = 0 \quad \text{und} \quad \frac{1}{3} \cdot 2\pi \cdot 1$$

$$\text{und} \quad \frac{1}{3} \cdot 2\pi \cdot 2$$

$$\left(\text{und} \quad \frac{1}{3} \cdot 2\pi \cdot 3, \text{ keine neue Lösung} \right)$$



I gewöhnliche Differentialgleichungen

$$x(t)$$

$$v(t) = \dot{x}(t).$$

$$m \ddot{x}(t) = \underline{F}(x(t))$$

Newton'sche
Bewegungsgleichungen

$$\underline{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$$

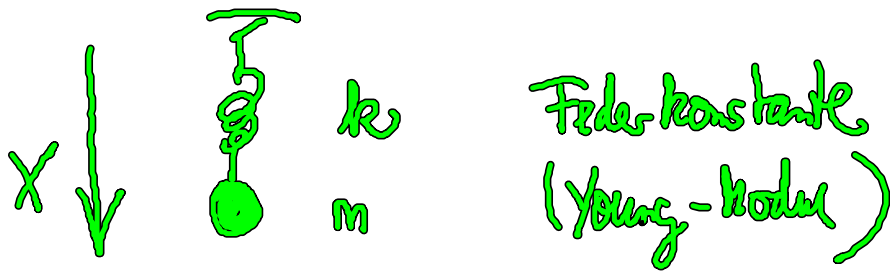
Ortsvektor

Klassifizierung:

- gewöhnliche DGL für Funktionen einer Variablen, z.B. Ort $\underline{x}(t)$ als Fkt der Zeit: t ist die Variable.
- partielle DGL für Funktionen mehrerer Variablen, z.B. Wellenfkt $\psi(x, y, z; t)$

Beispiel .

eindimensionaler harmonischer Oszillator



$$m \ddot{x}(t) = -k x(t), \quad \text{Hookes'sche Gesetz}$$

$k > 0$

Standardform

$$\boxed{\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) = 0} \quad \omega^2 \equiv \frac{k}{m}$$

- Ordnung der DGL: höchste auftretende Ableitung.

Beispiele: Funktionen $y = y(x)$

$$y''(x) + \omega^2 y(x) = 0$$

2. Ordnung,

$$y'''(x) + 4 \sin 2y(x) = 4x$$

3. Ordnung

- Lineare Differentialgleichungen:

$y, y', y'' \dots$ etc stehen nur in erster Potenz

auf. Beispiel: $y'' + 2y' = 4x$

$$y'' + y' = \sin x$$

⇒ Nicht lineare Differentialgleichungen

z.B. $y'' + e^{2xy} = 1$

- Explizit gegeben, z.B. $y'(x) = f(x, y)$

implizit gegeben, z.B. $e^{y'(x)} = y \sin(y'')$

- - Einzelne DGL

$$y'(x) + 2y(x) = 0$$

- Systeme von DGL

$$y_1'(x) + 2y_2(x) = 3x$$

$$y_2'(x) + 3y_1(x) = 4$$

$$y_3'(x) + y_1 y_2 = \sin x$$

Literatur:

W. Walter 'gewöhnliche Differentialgleichungen'
(Springer)

⇒ Bronstein 'Taschenbuch der Mathematik'.

2.2. DGL erster Ordnung

Explizite Form

$$y'(x) = f(x, y)$$

Hierbei ist $f(x, y)$ fest vorgegeben.

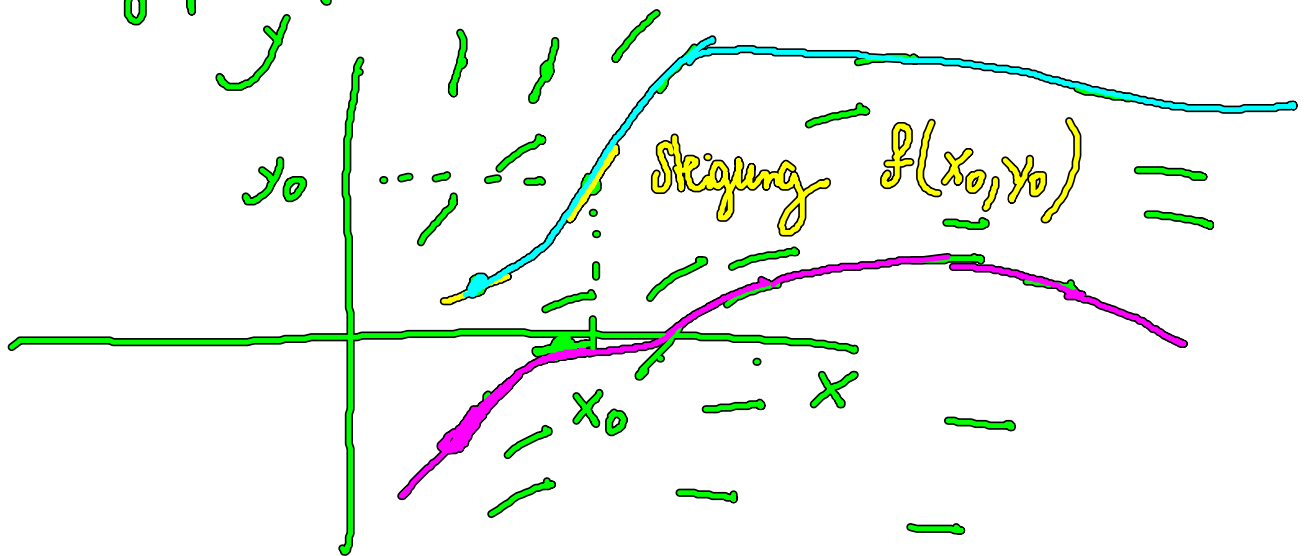
Aufgabe: Bestimme $y(x)$, so dass

$$y'(x) = f(x, y(x)).$$

Beispiel: $y'(x) = x^2 + 2 \sin(xy)$.

2.2.1. Richtungsfeld und Anfangswertproblem.

Richtungsfeld für $y'(x) = f(x, y)$.



Lösung $y(x)$ hängt ab von der Anfangsbedingung.

2.2.2 Methoden 1: Direkte Integration

$$y'(x) = f(x)$$

$$y'(x) = x^3 + \cos x \Rightarrow y(x) = \frac{1}{4}x^4 + \sin x + c$$

mit unbestimmter Konstante c , die dann durch die AB festgelegt wird,

$$y(x_0) = y_0 \Rightarrow y_0 = \frac{1}{4}x_0^4 + \sin x_0 + c \\ \Rightarrow c$$

2.2.3. Methoden 2: Trennung der Variablen

$$y'(x) = f(x) \cdot g(y) \quad \text{Produktform}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y) \quad / \quad \frac{1}{g(y)} \cdot dx$$

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x) \cdot dx \quad \text{Integration}$$

Beispiel: $y'(x) = e^{y(x)} \sin(x)$

$$\Leftrightarrow \frac{dy}{e^y} = \sin x \, dx$$

$$\Leftrightarrow \int e^{-y} dy = \int \sin x \, dx$$

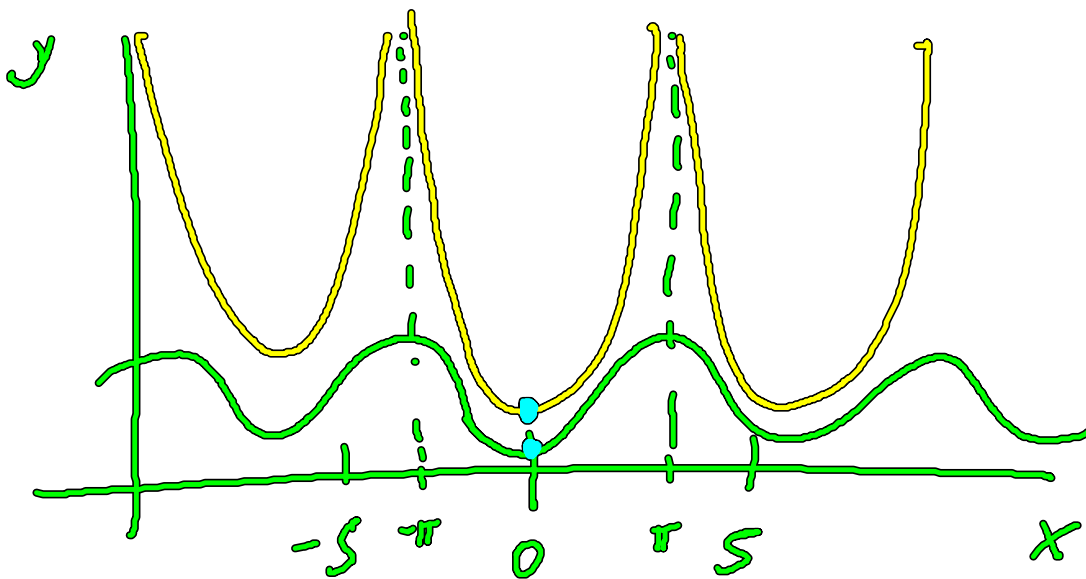
$$\log = \ln$$

$$\Leftrightarrow -e^{-y} = -\cos x - c$$

$$e^{-y} = \cos x + c$$

$$-y = \log(\cos x + c)$$

$$y(x) = -\ln(\cos x + c)$$



$$c=1$$

$$c=1.5$$

starke Abhängigkeit von den AB!

2.2.4 Lineare DGL

Diese hat die Form

$$L[x(t)] = \dot{x}(t) + g(t)x(t) = f(t)$$

mit $g(t), f(t)$ fest vorgegeben.

Aufgabe: Bestimme $x(t)$.

Fall $\cdot f(t) \equiv 0$: homogene DGL

$f(t) \neq 0$: inhomogene DGL

Beispiel: Teilchen der Masse m in z -Richtung,
Reibungskraft $= -\gamma \dot{z}(t)$

$$m \ddot{z}(t) = -\gamma \dot{z}(t) + f(t)$$

$$\left. \begin{aligned} v(t) &= \dot{z}(t) \\ \dot{v}(t) &= \ddot{z}(t) \end{aligned} \right\}$$

$$\dot{v}(t) + \frac{\gamma}{m} v(t) = \frac{1}{m} f(t)$$

Γ Lösung für $f=0$: $\dot{v}(t) + \frac{\gamma}{m} v(t) = 0$

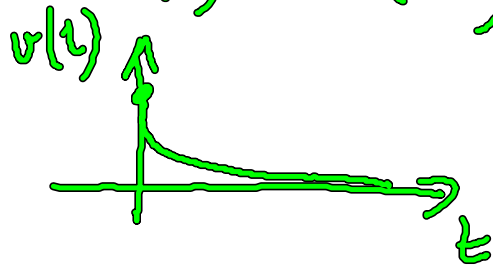
$$dv = -\frac{\gamma}{m} v dt$$

$$\int \frac{dv}{v} = -\int \frac{\gamma}{m} dt$$

$$\ln v = -\frac{\gamma}{m} t + c \Rightarrow v = e^{-\frac{\gamma}{m} t + c} \\ = e^{-\frac{\gamma}{m} t} \underbrace{e^c}$$

$$\Rightarrow v(t) = c e^{-\frac{\gamma}{m} t}$$

Lösung $v(t) = v(t=0) e^{-\frac{\gamma}{m} t}$



Allgemeiner Fall: für $\delta = 0$

$$\dot{x}(t) + g(t)x(t) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{x} = -g(t) dt \rightarrow \ln x + c = -\int g(t) dt$$

Lösung $x_h(t; t_0) = e^{-\int_{t_0}^t g(t') dt'}$

für die AB $x_h = 1$, denn

$$x_h(t_0; t_0) = 1$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} x_h(t; t_0) &= -g(t) e^{-\int_{t_0}^t g(t') dt'} \\ &= -g(t) x_h(t; t_0). \end{aligned}$$

Merke:

$$\frac{d}{dt} \int_{t_0}^t g(t') dt' = g(t) \quad (\text{Hauptsatz der Integralrechnung})$$

• Lösung für den inhomogenen Fall

$$\dot{x}(t) + g(t)x(t) = f(t).$$

Eine spezielle Lösung der DGL ist gegeben durch

$$x_s(t; t_0) = \int_{t_0}^t f(t') x_h(t, t') dt',$$

denn

$$\frac{d}{dt} x_s(t; t_0) = f(t) x_h(t, t'=t) + \int_{t_0}^t f(t') \frac{d}{dt} x_h(t, t') dt'$$

$$= f(t) + \int_{t_0}^t f(t') (-g(t)) x_h(t, t') dt'$$

$$= f(t) - g(t) \int_{t_0}^t f(t') x_h(t, t') dt'$$

$$= f(t) - g(t) \underbrace{x_s(t, t_0)}_{x_s(t, t_0)}, \quad \text{d.h.}$$

$$\dot{x}_s(t, t_0) + g(t) x_s(t, t_0) = f(t).$$