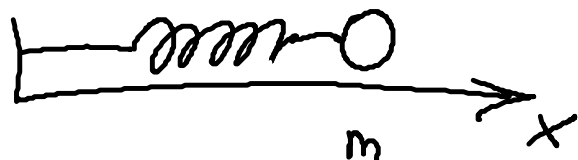


8.5.2008

8.5.2008

$$\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) = 0$$



harm. Oszillator
in 1d
 $\omega^2 \equiv \frac{k}{m}$

Umwandeln in ein System von DGL

erster Ordnung.

$$\left. \begin{aligned} x_1(t) &= x(t) \\ x_2(t) &= \dot{x}(t) \end{aligned} \right\}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -\omega^2 x_1(t) \end{aligned}}$$

Umbenennung

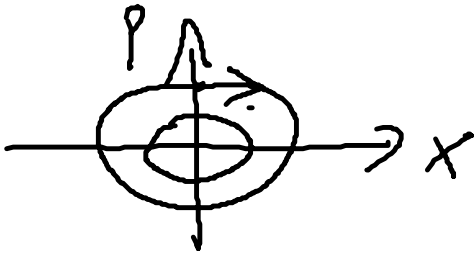
$$\dot{x}(t) = \frac{1}{m} p(t)$$

$$\dot{p}(t) = -m\omega^2 x(t)$$

x : Ort

p : Impuls

} bestimmen die Bewegung im
Phasenraum.



2.4. Lineare DGL-Systeme mit konstanten Koeffizienten

2.4.1. Normalform

$$y_1'(t) = a_{11}y_1(t) + a_{12}y_2(t) + \dots + a_{1n}y_n(t)$$

$$y_2'(t) = a_{21}y_1(t) + \dots + a_{2n}y_n(t)$$

\vdots

\vdots

\vdots

$$y_n'(t) = a_{n1} y_1(t) + \dots + a_{nn} y_n(t),$$

wobei $a_{ij} \in \mathbb{R}$.

Schreiben als

$$y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix}; \quad \underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\boxed{y'(t) = \underline{\underline{A}} y(t)}$$

Lineares DGL-System
mit konst. Koef.

$$y' = \underline{\underline{A}} y + \underline{b}$$

inhomogenes System

$$y' = \underline{\underline{A}} y$$

homogenes System.

2.4.2. Wiederholung Lineare Algebra (I)
Vektoren, Matrizen.

- Vektorräume mit Vektoren $\underline{x}, \underline{y}, \dots$

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n x_i \underline{e}_i, \quad x_i \in \mathbb{C}$$

\underline{e}_i Einheitsvektoren

- Basis. Lineare Unabhängigkeit.

- Linear Abbildungen, Matrizen.

$n \times n$ -Matrizen, Beisp.: $\underline{A} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$

$$\underline{x} \mapsto \underline{y} = \underline{A} \underline{x}$$

- Matrizenprodukt ist i.a. nicht kommutativ,

$$[\underline{A}, \underline{B}] = \underline{A}\underline{B} - \underline{B}\underline{A} \neq 0$$

- Inverse einer Matrix.

Existiert z.B. nicht für $\underline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\det A = 1 \cdot 0 - 0 \cdot 0 = 0$$

beschreibt Projektion auf x_1 -Achse.
Umkehrabbildung existiert nicht.

2.4.3. Lineares DGL-System: Exponentiallösung.

System: $\underline{y}'(t) = \underline{A} \underline{y}(t), \quad \underline{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$

n -dimensionales System.

$$n=1: \quad y'(t) = a y(t)$$

Lösung. 1) $y(t) = y_0 e^{at}$, denn
 $y'(t) = a y_0 e^{at} = a y(t)$

2) $\frac{dy}{y} = a dt \quad | \int$

$$\ln y = a \cdot t + d \Rightarrow y = e^{at+d} = y_0 e^{at}$$

Hinweise: $a = d + i\beta, \quad d, \beta \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow e^{at} = e^{(d+i\beta)t} = e^{dt} (\cos \beta t + i \sin \beta t)$$

$n > 1$:

$$y(t) = e^{\underline{A} \cdot t} y_0$$

$$\Rightarrow y'(t) = \underline{A} e^{\underline{A} \cdot t} y_0 = \underline{A} y(t)$$

Def: Exponentialfunktion einer $n \times n$ -Matrix M ist definiert als

$$e^{\underline{M}} = \exp(\underline{M}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \underline{M}^n$$

$$\underline{M}^n = \underline{M} \cdot \underline{M} \cdot \dots \cdot \underline{M} \quad (n\text{-mal})$$

$$\frac{d}{dt} e^{\underline{M} \cdot t} = \underline{M} e^{\underline{M} \cdot t} \quad (\text{Aufgabe}).$$

$$\Rightarrow y'(t) = \frac{d}{dt} e^{\underline{A} \cdot t} y_0 \\ = \underline{A} e^{\underline{A} \cdot t} y_0 = \underline{A} y(t).$$

Ausrechnen: 1) Direkt über die Reihe
2) Durch Diagonalisieren der Matrix

2.4.4. Wiederholung LA (II): Eigenwerte + Eigenvektoren

Matrix A, A x = λ x Eigenwertgleichung

λ : Eigenwert
x: Eigenvektor zum Eigenwert λ .

$\det \underline{A} - \lambda \underline{E} = 0$ λ als
Nullstellen des
charakt. Polynoms.

Diagonalisierbarkeit: Nullstellen des ch. Poly. mit
Vielfachheit k : k l.u.
Eigenvektoren.

Sonst: Jordan-Form.

Gegenbeispiel (nicht diagonal.): A = $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Aufgabe: Paulimatrizen

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Diagonalform: $n \times n$ -Matrix \underline{A} mit
 n l.u. Eigenvektoren \underline{x}_n , EW (Eigenwerte) λ_n

$$\underline{A} = \underline{C} \underline{D} \underline{C}^{-1}$$

mit $\underline{C} = (\underline{x}_1, \underline{x}_2, \dots, \underline{x}_n)$, denn
 \uparrow Spaltenvektoren

$$\underline{A} \underline{C} = (\underline{A} \underline{x}_1, \underline{A} \underline{x}_2, \dots) = (\lambda_1 \underline{x}_1, \lambda_2 \underline{x}_2, \dots, \lambda_n \underline{x}_n) \\ = (\underline{x}_1, \underline{x}_2, \dots, \underline{x}_n) \underline{D}, \text{ wobei}$$

$$\underline{D} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \quad \uparrow \text{ von rechts mit } \underline{C}^{-1}$$

$$\Rightarrow \underline{A} = \underline{C} \underline{D} \underline{C}^{-1}$$

„Hauptachsentransformation“ (Diagonalisierung)

2.4.5 Diagonalisierung der Exponentiallösung

$$\underline{y}' = \underline{A} \underline{y} \Rightarrow \underline{y}(t) = e^{\underline{A}t} \underline{y}_0$$

(\underline{y}_0 : Anfangsbedingung zu Zeit $t=0$).

$$\underline{A} = \underline{C} \underline{D} \underline{C}^{-1}$$

jetzt $e^{\underline{A}t} = e^{\underline{C} \underline{D} \underline{C}^{-1} \cdot t}$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} [\underline{C} \underline{D} \underline{C}^{-1}]^n t^n$$

$$= \underline{C} e^{\underline{D} \cdot t} \underline{C}^{-1}$$

$$\underline{D} = \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & & & \\ & \lambda_2^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n^2 \end{pmatrix} = \underline{C} \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & & & 0 \\ & e^{\lambda_2 t} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} \underline{C}^{-1}$$

Damit folgt direkt

$$y(t) = \underline{C} \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} \underline{C}^{-1} y_0$$

2.4.6. Eigenlösungen als Anfangswertproblem

$$y'(t) = \underline{A} y(t)$$

Lösungsansatz : „Exponentialansatz“

$$y(t) = \underline{x} e^{\lambda t}$$

$$\Rightarrow y'(t) = \lambda \underline{x} e^{\lambda t} = \underline{A} \underline{x} e^{\lambda t}$$

$$\Rightarrow \underline{A} \underline{x} = \lambda \underline{x}$$

also wieder EW-Gleichung für die EW λ_i (n Stücke)
und EV (Eigenvektoren) \underline{x}_i . Deshalb haben
wir n linear unabhängige Eigenlösungen

$$y_i(t) = \underline{x}_i e^{\lambda_i \cdot t}, \quad i=1, \dots, n$$

Allgemeine Lösung von $y' = \underline{A}y$ als
Linearkombination der $y_i(t)$, d.h.

$$y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) + \dots + c_n y_n(t)$$

$$\begin{aligned} \Gamma \quad y'(t) &= c_1 y_1'(t) + \dots = c_1 \underline{A} y_1(t) + \dots + c_n \underline{A} y_n(t) \\ &= \underline{A} (c_1 y_1(t) + \dots + c_n y_n(t)) \\ \text{L} \quad &= \underline{A} y(t) \end{aligned}$$

Wir haben n (reelle bzw. komplexe) Koeffizienten

$$c_1, \dots, c_n.$$

Aus der AB (Anfangsbedingung)

$$y(t=0) = c_1 y_1(0) + \dots = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n$$

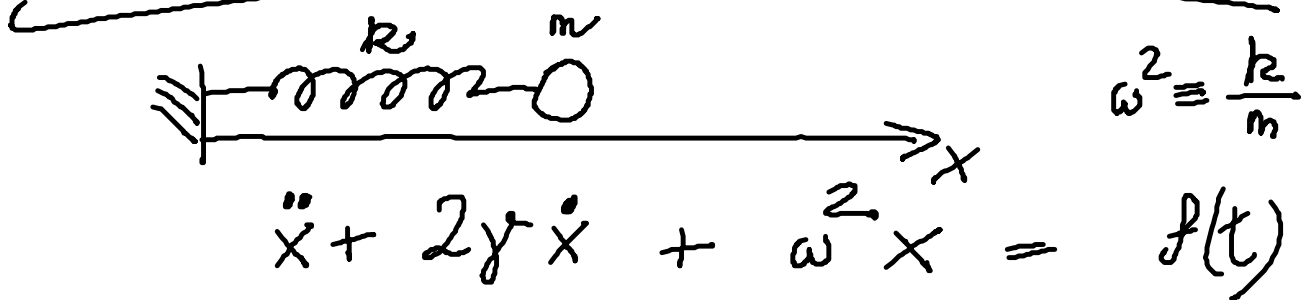
$$= \underbrace{(x_1, x_2, \dots, x_n)}_{\underline{c}} \underbrace{\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}}_{\underline{c}} = \underline{c} \underline{c}$$

$$\Rightarrow \underline{c} = \underline{c}^{-1} y(t=0)$$

\uparrow
 Koeffizientenvektor.

$\underbrace{\hspace{10em}}_{AB}$

2.4.8 ANWENDUNG MECHANIK: der gedämpfte harmonische Oszillator



Umschreiben als System

$$\dot{x} = \frac{p}{m}$$

ω : Winkelfrequenz
 $\gamma > 0$ Reibungskonstante

$$m\ddot{x} = \dot{p} = -m\omega^2 x - 2\gamma m p + m f(t)$$

Vereinfachung: Setze $m=1$.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= p \\ \dot{p} &= -\omega^2 x - 2\gamma p + f \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{p} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -2\gamma \end{pmatrix}}_{\underline{\underline{A}}} \begin{pmatrix} x \\ p \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ f \end{pmatrix}}_{\underline{b}}$$

Zunächst Fall $\underline{b} = 0$, d.h. $f(t) = 0$ keine äußere Kraft,

$$\dot{\underline{y}} = \underline{\underline{A}} \underline{y}, \quad \underline{y} = \begin{pmatrix} x \\ p \end{pmatrix}$$

Eigenwerte λ_i von $\underline{\underline{A}}$:

$$0 = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -\omega^2 & -2\gamma - \lambda \end{vmatrix} = -\lambda(-2\gamma - \lambda) + \omega^2$$

$$\Rightarrow \lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega^2 = 0$$

p. 19 Formel

$$\lambda_{1,2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega^2}$$

z.B. $\gamma = 0$ (keine Reibung), dann $\lambda_{1,2} = \pm \sqrt{-\omega^2} = \pm i\omega$

Eigenvektoren hierzu:

$$\underline{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i\omega \end{pmatrix} \text{ zu } \lambda_1 = i\omega$$

$$\underline{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i\omega \end{pmatrix} \text{ zu } \lambda_2 = -i\omega$$

\Rightarrow Die allgemeine Lösung des homogenen Systems ist

$$y(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ +i\omega \end{pmatrix} e^{i\omega t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -i\omega \end{pmatrix} e^{-i\omega t}$$

c_1, c_2 aus Anfangsbedingung

$$y(t=0) = \begin{pmatrix} x(0) \\ p(0) \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} x_0 \\ p_0 \end{pmatrix}$$