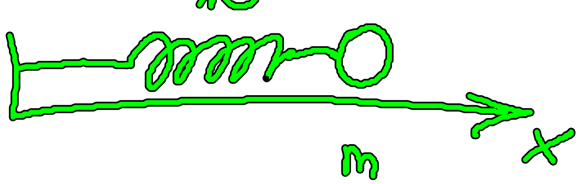
8.5.2008

8.5.2008

$$\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) = 0$$

harm. Oszillator in 1d



$$\omega^2 = \frac{k}{m}$$

Umwandeln in ein System von DGL

erster Ordnung.

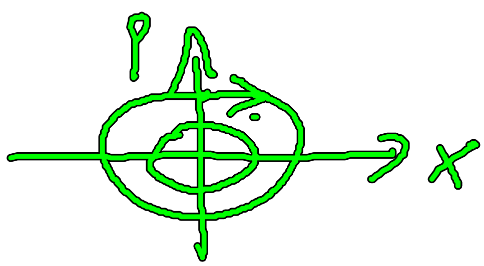
$$\left.\begin{aligned} x_1(t) &= x(t) \\ x_2(t) &= \dot{x}(t) \end{aligned}\right\} \qquad \boxed{\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -\omega^2 x_1(t) \end{aligned}}$$

Umbenennung $\Rightarrow$

$$\dot{x}(t) = \frac{1}{m}\, p(t)$$

$$\dot{p}(t) = -m\omega^2 x(t)$$

$\left.\begin{aligned} x&: \text{Ort} \\ p&: \text{Impuls} \end{aligned}\right\}$ bestimmen die Bewegung im <u>Phasenraum</u>.



2.4. Lineare DGL-Systeme mit konstanten Koeffizienten

2.4.1. Normalform

$$\begin{aligned}
y_1'(t) &= a_{11}\, y_1(t) + a_{12}\, y_2(t) + \ldots + a_{1n}\, y_n(t) \\
y_2'(t) &= a_{21}\, y_1(t) + \quad \ldots \quad a_{2n}\, y_n(t) \\
&\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots
\end{aligned}$$

$$y_n'(t) = a_{n1}\, y_1(t) + \;\dots\; a_{nn}\, y_n(t),$$

wobei $a_{ij} \in \mathbb{R}$.

Schreiben als

$$y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix}; \quad \underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\boxed{y'(t) = \underline{\underline{A}}\, y(t)}$$

Lineares DGL-System mit konst. Koeff.

$y' = \underline{\underline{A}}\, y + \underline{b}$ inhomogenes System

$y' = \underline{\underline{A}}\, y$ homogenes System.

2.4.2. Wiederholung Lineare Algebra (I)

Vektoren, Matrizen.

– Vektorräume mit Vektoren $\underline{x}$, $\underline{y}$, ..

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} x_i \underline{e}_i , \qquad x_i \in \mathbb{C}$$

$\underline{e}_i$ Einheitsvektoren

– Basis. Lineare Unabhängigkeit.

– Lineare Abbildungen, Matrizen.

$n \times n$ - Matrizen, Beisp.: $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$

$$\underline{x} \mapsto \underline{y} = \underline{\underline{A}}\,\underline{x}$$

– Matrizenprodukt ist i.a. nicht kommutativ,

$$[\underline{\underline{A}}, \underline{\underline{B}}] = \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}} - \underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{A}} \neq 0$$

– Inverse einer Matrix.

existiert z.B. nicht für $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\det A = 1 \cdot 0 - 0 \cdot 0 = 0$$

beschreibt Projektion auf x_1-Achse.
Umkehrabbildung existiert nicht.

2.4.3. Lineare DGL-System: Exponentiallösung.

System: $\underline{y}'(t) = \underline{\underline{A}}\,\underline{y}(t)$, $\underline{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$

n-dimensionales System.

$n=1$: $\qquad y'(t) = a\, y(t)$

Lösung: 1) $y(t) = y_0\, e^{at}$, denn
$y'(t) = a y_0\, e^{at} = a\, y(t)$

2) $\dfrac{dy}{y} = a\, dt \quad \Big/ \int$

$\ln y = a \cdot t + c \Rightarrow y = e^{at+c}$
$= y_0\, e^{at}$.

<u>Hinweise</u>: $\quad a = \alpha + i\beta, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \quad e^{at} = e^{(\alpha + i\beta)t} = e^{\alpha t}(\cos\beta t + i \sin\beta t)$

$n>1$:

$$\underline{y}(t) = e^{\underline{\underline{A}} \cdot t}\, \underline{y}_0$$

$$\Rightarrow \underline{y}'(t) = \underline{\underline{A}}\, \underbrace{e^{\underline{\underline{A}} \cdot t}\, \underline{y}_0} = \underline{\underline{A}}\, \underline{y}(t)$$

<u>Def</u>: Exponentialfunktion einer $n \times n$-Matrix $\underline{\underline{M}}$ ist definiert als

$$e^{\underline{\underline{M}}} = \exp(\underline{\underline{M}}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\, \underline{\underline{M}}^n$$

$\underline{\underline{M}}^n = \underline{\underline{M}} \cdot \underline{\underline{M}} \cdot \ldots \cdot \underline{\underline{M}} \qquad$ (n-mal).

$$\frac{d}{dt} e^{\underline{\underline{M}} \cdot t} = \underline{\underline{M}}\, e^{\underline{\underline{M}} \cdot t} \quad \text{(Aufgabe).}$$

$$\Rightarrow \quad y'(t) = \frac{d}{dt} e^{\underline{\underline{A}} \cdot t} y_0$$

$$= \underline{\underline{A}}\, e^{\underline{\underline{A}} \cdot t} y_0 = \underline{\underline{A}}\, y(t).$$

Ausrechnen:
1) Direkt über die Reihe
2) Durch <u>Diagonalisieren</u> der Matrix

2.4.4. Wiederholung LA (II): Eigenwerte + Eigenvektoren

Matrix $\underline{\underline{A}}$, $\quad \underline{\underline{A}}\, \underline{x} = \lambda \underline{x}$ Eigenwertgleichung

λ: Eigenwert
$\underline{x}$: Eigenvektor zum Eigenwert λ.

$\det \underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{E}} = 0$ $\quad$ λ als Nullstellen des charakt. Polynoms.

Diagonalisierbarkeit: Nullstellen des ch. Poly. mit Vielfachheit k: k l.u. Eigenvektoren.

sonst: Jordan-Form.

Gegenbeispiel (nicht diagonal.): $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Aufgabe: Paulimatrizen

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Diagonalform: $n \times n$-Matrix $\underline{\underline{A}}$ mit n l.u. Eigenvektoren $\underline{x}_n$, EW (Eigenwerten) λ_n

$$\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{C}}\,\underline{\underline{D}}\,\underline{\underline{C}}^{-1}$$

mit $\underline{\underline{C}} = \left(\underline{x}_1, \underline{x}_2, \dots, \underline{x}_n \right)$ ↑ Spaltenvektoren, denn

$$\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{C}} = \left(\underline{\underline{A}}\,\underline{x}_1, \underline{\underline{A}}\,\underline{x}_2, \dots \right) = \left(\lambda_1 \underline{x}_1, \lambda_2 \underline{x}_2, \dots, \lambda_n \underline{x}_n \right)$$

$$= \left(\underline{x}_1, \underline{x}_2, \dots, \underline{x}_n \right) \underline{\underline{D}},$$

wobei

$$\underline{\underline{D}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

↑ von rechts mit $\underline{\underline{C}}^{-1}$

$$\Rightarrow \underline{\underline{A}} = \underline{\underline{C}}\,\underline{\underline{D}}\,\underline{\underline{C}}^{-1}$$

(„Hauptachsentransformation" / Diagonalisierung)

2.4.5 Diagonalisierung der Exponentiallösung

$$y' = \underline{\underline{A}}\, y \Rightarrow y(t) = e^{\underline{\underline{A}}t} y_0$$

(y_0: Anfangsbedingung zu Zeit $t=0$).

$$\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{C}}\,\underline{\underline{D}}\,\underline{\underline{C}}^{-1}$$

jetzt $\quad e^{\underline{\underline{A}}t} = e^{\underline{\underline{C}}\,\underline{\underline{D}}\,\underline{\underline{C}}^{-1}\cdot t} =$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left[C D C^{-1} \right]^n t^n$$

$$C D \underbrace{\underline{\underline{C}}^{-1} C}_{} D C^{-1}$$

$$\vdots$$

$$= \underline{\underline{C}}\, \underbrace{e^{\underline{\underline{D}}\cdot t}}_{}\, \underline{\underline{C}}^{-1}$$

$$= \underline{\underline{C}} \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & & 0 \\ & e^{\lambda_2 t} & \\ 0 & & \ddots \\ & & & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} \underline{\underline{C}}^{-1}$$

$$\underline{\underline{D}}^2 = \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & & \\ & \lambda_2^2 & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda_n^2 \end{pmatrix}$$

Damit folgt direkt

$$y(t) = \underline{\underline{C}} \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} \underline{\underline{C}}^{-1} y_0$$

2.4.6. Eigenlösungen als Anfangswertproblem

$$y'(t) = \underline{\underline{A}}\, y(t)$$

Lösungsansatz : „Exponentialansatz"

$$y(t) = \underline{x}\, e^{\lambda t}$$

$$\Rightarrow y'(t) = \lambda \underline{x}\, \cancel{e^{\lambda t}} = \underline{\underline{A}}\, \underline{x}\, \cancel{e^{\lambda t}}$$

$\Rightarrow \qquad \underline{\underline{A}}\,\underline{x} = \lambda\,\underline{x}$

also wieder EW-Gleichung für die EW λ_i (n Stück) und EV (Eigenvektoren) $\underline{x}_i$. Deshalb haben wir n linear unabhängige Eigenlösungen

$$\underline{y}_i(t) = \underline{x}_i\, e^{\lambda_i \cdot t}, \quad i = 1, \dots, n$$

Allgemeine Lösung von $\underline{y}' = \underline{\underline{A}}\,\underline{y}$ als Linearkombination der $\underline{y}_i(t)$, d.h.

$$\underline{y}(t) = c_1 \underline{y}_1(t) + c_2 \underline{y}_2(t) + \dots + c_n \underline{y}_n(t)$$

$$\begin{aligned} \underline{y}'(t) &= c_1 \underline{y}_1'(t) + \dots = c_1 \underline{\underline{A}}\,\underline{y}_1(t) + \dots + c_n \underline{\underline{A}}\,\underline{y}_n(t) \\ &= \underline{\underline{A}}\left(c_1 \underline{y}_1(t) + \dots + c_n \underline{y}_n(t)\right) \\ &= \underline{\underline{A}}\,\underline{y}(t) \end{aligned}$$

Wir haben n (reelle bzw. komplexe) Koeffizienten $c_1, \dots, c_n$.

Aus der AB (Anfangsbedingung)

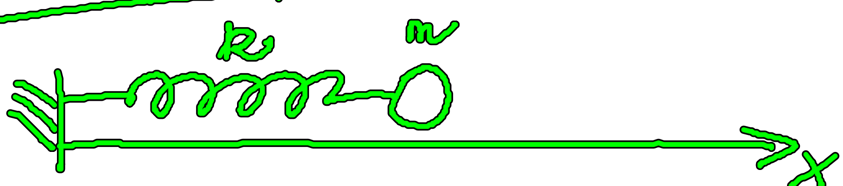
$$\underline{y}(t=0) = c_1 \underline{y}_1(0) + \ldots = c_1 \underline{x}_1 + c_2 \underline{x}_2 + \ldots + c_n \underline{x}_n$$

$$= \underbrace{(\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_n)}_{\underline{\underline{C}}} \underbrace{\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}}_{\underline{c}} = \underline{\underline{C}}\, \underline{c}$$

$$\Rightarrow \quad \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Koeffizientenvektor.}}}{\underline{c}} = \underline{\underline{C}}^{-1} \underbrace{\underline{y}(t=0)}_{AB}$$

2.4.8 ANWENDUNG MECHANIK:

der gedämpfte harmonische Oszillator



$$\omega^2 = \frac{k}{m}$$

$$\ddot{x} + 2\gamma \dot{x} + \omega^2 x = f(t)$$

ω: Winkelfrequenz

$\gamma > 0$ Reibungskonstante

Umschreiben als System

$$\dot{x} = \frac{p}{m}$$

$$m\ddot{x} = \dot{p} = -m\omega^2 x - 2\gamma m p + m f(t)$$

Vereinfachung: Setze $m = 1$.

$$\dot{x} = p$$
$$\dot{p} = -\omega^2 x - 2\gamma p + f$$

$$\begin{pmatrix}\dot{x}\\ \dot{p}\end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix}0 & 1\\ -\omega^2 & -2\gamma\end{pmatrix}}_{\underline{\underline{A}}}\begin{pmatrix}x\\ p\end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix}0\\ f\end{pmatrix}}_{\underline{b}}$$

Zunächst Fall $\underline{b}=0$, d.h. $f(t)=0$ keine äußere Kraft,

$$\dot{\underline{y}} = \underline{\underline{A}}\,\underline{y}, \quad \underline{y} = \begin{pmatrix}x\\ p\end{pmatrix}$$

Eigenwerte λ_i von $\underline{\underline{A}}$:

$$0 = \begin{vmatrix}-\lambda & 1\\ -\omega^2 & -2\gamma-\lambda\end{vmatrix} = -\lambda(-2\gamma-\lambda)+\omega^2$$

$$\Rightarrow \quad \lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega^2 = 0 \qquad \text{pq Formel}$$

$$\lambda_{1,2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2-\omega^2}$$

z.B. $\gamma=0$ (keine Reibung), dann $\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{-\omega^2}$
$= \pm i\omega$

Eigenvektoren hierzu:

$$\underline{x}_1 = \begin{pmatrix}1\\ i\omega\end{pmatrix} \quad \text{zu} \quad \lambda_1 = i\omega$$

$$\underline{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i\omega \end{pmatrix} \quad \text{zu} \quad \lambda_2 = -i\omega$$

$\Rightarrow$ Die allgemeine Lösung des homogenen Systems ist

$$\underline{y}(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ +i\omega \end{pmatrix} e^{i\omega t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -i\omega \end{pmatrix} e^{-i\omega t}$$

c_1, c_2 aus Anfangsbedingungen

$$\underline{y}(t=0) = \begin{pmatrix} x(0) \\ p(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ p_0 \end{pmatrix}$$