

15.5.2008

Wahl. lineare Algebra

1) Skalarprodukt (inner Produkt)

$$\underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{C}^n$$

$$\underline{x} \cdot \underline{y} = \sum_{i=1}^n x_i^* \cdot y_i$$

- Länge (Norm) eines Vektors \underline{x} ist

$$\|\underline{x}\| = \sqrt{\underline{x} \cdot \underline{x}}$$

- $\underline{x}, \underline{y}$ heißen orthogonal $\Leftrightarrow \underline{x} \cdot \underline{y} = 0$

2) Kreuzprodukt von $\underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^3$

$$\underline{x} \times \underline{y} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}$$

$$= \vec{e}_1 (x_2 y_3 - y_2 x_3) - \vec{e}_2 (x_1 y_3 - y_1 x_3) + \vec{e}_3 (x_1 y_2 - y_1 x_2)$$

Es gelten

$$\underline{x} \times \underline{y} \perp \underline{x}, \underline{y}$$

$$\underline{x} \times \underline{y} = -(\underline{y} \times \underline{x})$$

ε -Tensor (Levi-Civita-Tensor):

$$\varepsilon^{ijk} = \begin{cases} 1 = \varepsilon^{123} = \varepsilon^{231} = \varepsilon^{312} \\ -1 = \varepsilon^{213} = \varepsilon^{132} = \varepsilon^{321} \end{cases}$$

zykl. Vertauschung

$$\underline{x} \times \underline{y} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^0 \varepsilon^{ijk} x_i y_j \underline{e}_k \quad \text{sonst}$$

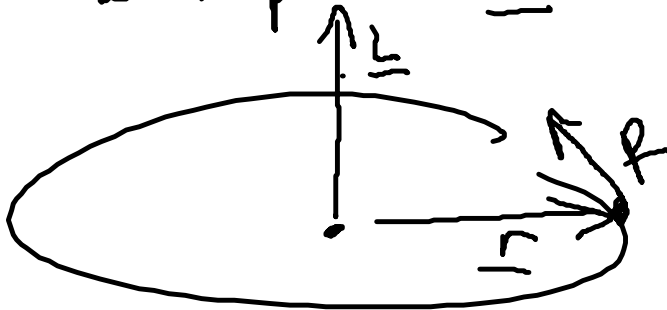
$$\equiv \varepsilon^{ijk} x_i y_j \underline{e}_k$$

(Weglassen der Summensymbole:
Einsteinische Summationskonvention)

$$\underline{a} \times (\underline{b} \times \underline{c}) = \underline{b}(\underline{a} \cdot \underline{c}) - \underline{c}(\underline{a} \cdot \underline{b})$$

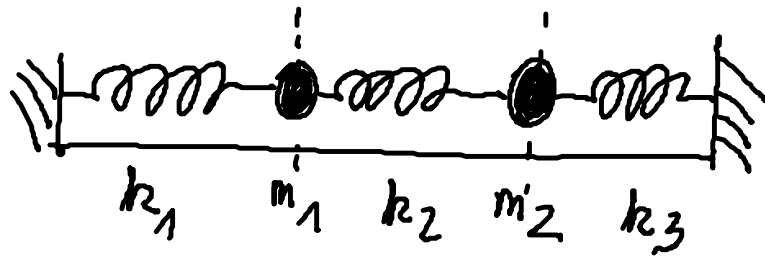
„bac-cab“ Regel.

Beispiel: Drehimpuls $\underline{L} \equiv \underline{r} \times \underline{p}$



2.5. Anwendung MECHANIK: Eigenschwingungen
und Eigenmoden (Normalmoden)

N Massenpunkte, durch lineare Federn
miteinander verbunden



$$m_i \ddot{x}_i = \sum_{j=1}^N A_{ij} x_j \quad i = 1, \dots, N$$

Matrix A_{ij} wird durch
die Anordnung bestimmt.

Lösung durch Exponentialansatz

Fall $d=1$ (eine Dimension), $N=2$

Zwei gekoppelte Massen m_1, m_2

$$m_1 \ddot{x}_1 = A_{11} x_1 + A_{12} x_2$$

$$m_2 \ddot{x}_2 = A_{21} x_1 + A_{22} x_2,$$

$$A_{ij} \in \mathbb{R}$$

Setze $x_1(t) = c_1 e^{-i\omega t}$
 $x_2(t) = c_2 e^{-i\omega t}$ lin.

$$-\omega^2 m_1 c_1 = A_{11} c_1 + A_{12} c_2$$

$$-\omega^2 m_2 c_2 = A_{21} c_1 + A_{22} c_2$$

Schreiben als $\underline{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$

$$\boxed{\left(\underline{A} + \underline{M} \omega^2 \right) \underline{c} = \underline{0}}$$

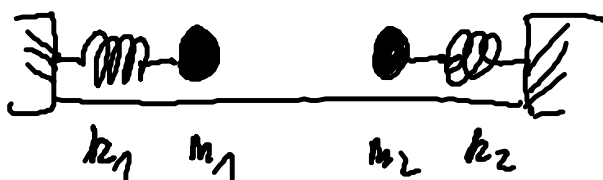
$\underline{B} \underline{x} = \underline{0}$

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}, \quad \underline{M} = \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix}$$

Hat nicht-triviale Lösung für

$$\| \det(\underline{A} + \underline{M} \omega^2) = 0 \| \Rightarrow \text{Werte für } \omega^2$$

Fall ungekoppelter Massenpunkte



$$\Rightarrow \underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} -k_1 & 0 \\ 0 & -k_2 \end{pmatrix}, \text{ denn}$$

$$m_1 \ddot{x}_1 = -k_1 x_1$$

$$m_2 \ddot{x}_2 = -k_2 x_2$$

Damit folgt

$$\det \left(\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{M}} \omega^2 \right) = \begin{vmatrix} -k_1 + \omega^2 m_1 & 0 \\ 0 & -k_2 + \omega^2 m_2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \left(-k_1 + \omega^2 m_1 \right) \left(-k_2 + \omega^2 m_2 \right) = 0$$

$$\text{also } \omega^2 = \frac{k_1}{m_1} \quad \text{oder} \quad \omega^2 = \frac{k_2}{m_2}$$

$$\text{Koeffizientenvektoren } \underline{c} \text{ aus } \left(\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{M}} \omega^2 \right) \underline{c} = 0$$

$$\begin{pmatrix} -k_1 + m_1 \omega^2 & 0 \\ 0 & -k_2 + m_2 \omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = 0$$

für $\omega = \omega_1 = \sqrt{\frac{k_1}{m_1}}$: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$

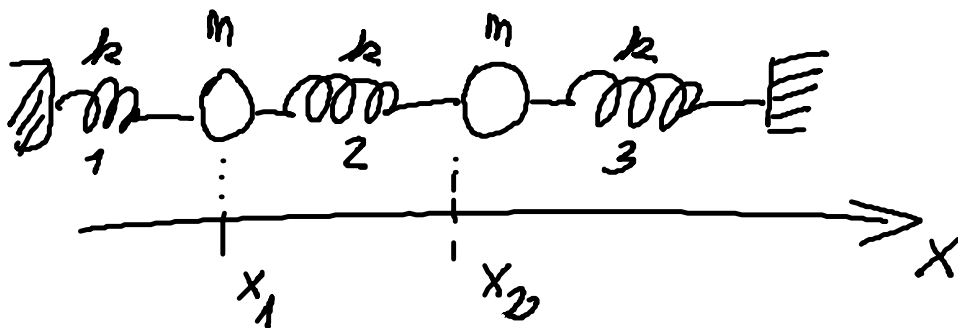
für $\omega = \omega_2 = \sqrt{\frac{k_2}{m_2}}$: $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$

Aufgabe 1: $\delta_{ij} \equiv \begin{cases} 1 & \text{für } i=j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

Allgemeine Lösung ist Linearkombination der Eigenmoden, d.h.

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \left\{ d_1 e^{-i\omega_1 t} + \beta_1 e^{+i\omega_1 t} \right\} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \left\{ d_2 e^{-i\omega_2 t} + \beta_2 e^{+i\omega_2 t} \right\}$$

$\omega_1^2 = k_1/m$



von F.1

$$m \ddot{x}_1 = -k x_1 - k (x_1 - x_2)$$

$$m \ddot{x}_2 = -k x_2 - k (x_2 - x_1)$$



Exponentialansatz:

$$\underline{A} = k \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad \underline{M} = m \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\underline{A} + \underline{M} \omega^2 \right) \underline{c} = \underline{0}$$

$$\Rightarrow 0 = \det \left| \underline{A} + \underline{M} \omega^2 \right| = \begin{vmatrix} -2k + m\omega^2 & k \\ k & -2k + m\omega^2 \end{vmatrix}$$

$$= (-2k + m\omega^2)^2 - k^2$$

$$\Rightarrow -2k + m\omega^2 = \pm k$$

$$\Rightarrow \boxed{\omega_1^2 = k/m}, \quad \boxed{\omega_2^2 = 3k/m}$$

2 Eigenfrequenzen, jeweils mit \pm ,
insgesamt 4 Eigenwerte ω in

Jetzt Eigenvektoren $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ aus $e^{-i\omega t}$

$$\left(\underline{A} + \underline{M} \omega^2 \right) \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \underline{0} \quad \text{bestimmen!}$$

• Für $\omega = \omega_1$:

$$\begin{pmatrix} \underbrace{-2k + m\omega_1^2}_{-k} & k \\ k & \underbrace{-2k + m\omega_1^2}_{-k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow k \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

entspricht Schwingung

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \left\{ d_1 e^{-i\omega_1 t} + \beta_1 e^{+i\omega_1 t} \right\}$$

Entsprechend für ω_2 : Eigenvektor $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

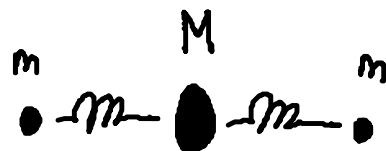
Allgemeine Lösung ist Superposition

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \left\{ d_1 e^{-i\omega_1 t} + \beta_1 e^{+i\omega_1 t} \right\}}_{\text{1. Normalmode des System}} + \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \left\{ d_2 e^{-i\omega_2 t} + \beta_2 e^{+i\omega_2 t} \right\}}_{\text{2. Normalmode des System}}$$

mit $\omega_1^2 = k/m$ 1. Normalmode des System
 $\omega_2^2 = 3k/m$ 2. Normalmode des System

Mehrere ($N > 2$) gekoppelte Oszillatoren

Analog zu $N=2$, aber jetzt $N \times N$ -Matrizen
 statt 2×2 -Matrizen



Festkörper



EDynamik

2.6 Lineare inhomogene Systeme

$$y'(t) = \underline{\underline{A}} y(t) + \underline{b}(t)$$

\uparrow $n \times n$ -Matrix

1. Schritt: homogene Gleichung $\underline{b} \equiv 0$ hat

Lösung $y_h(t, t') = \underline{\underline{e}}^{\underline{A} \cdot (t-t')} \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$

mit AB $y_h(t, t) = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$. \uparrow Propagator

2. Schritt: spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung

$$\underline{y}_s(t, t_0) = \int_{t_0}^t dt' \underline{\underline{e}}^{\underline{A}(t-t')} \underline{b}(t')$$

denn $\frac{d}{dt} \underline{y}_s(t, t_0) = \underline{\underline{e}}^{\underline{A}(t-t)} \underline{b}(t'=t) + \int_{t_0}^t \underline{\underline{A}} \underline{\underline{e}}^{\underline{A}(t-t')} \underline{b}(t')$

$$= \underline{b}(t) + \underline{\underline{A}} \underline{y}_s(t, t_0)$$

Gesamtlösung: Superposition von $y_s(t, t_0)$ und den Lösungen der homogenen Gleichung.

$$y(t) = \int_{t_0}^t dt' e^{\underline{A}(t-t')} \underline{b}(t') + e^{\underline{A}(t-t_0)} y(t=t_0)$$

$$y(t_0) = y(t=t_0) \quad \begin{array}{l} \text{Anfangsbedingungen} \\ \text{zur Zeit } t = t_0 \end{array}$$

für $t \geq t_0$ setzt sich die Lösung aus zwei Anteilen zusammen.