15.5.2008

Wdhl. lineare Algebra

1) Skalarprodukt (inneres Produkt)

$\underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{C}^n$

$$\underline{x} \cdot \underline{y} = \sum_{i=1}^{n} x_i^* \cdot y_i$$

- Länge (Norm) eines Vektors $\underline{x}$ ist

$$\|\underline{x}\| = \sqrt{\underline{x}\cdot\underline{x}}$$

- $\underline{x}, \underline{y}$ heißen orthogonal $\Leftrightarrow \underline{x}\cdot\underline{y} = 0$

2) Kreuzprodukt von $\underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^3$

$$\underline{x} \times \underline{y} = \begin{vmatrix} \underline{e}_1 & \underline{e}_2 & \underline{e}_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}$$

$$= \underline{e}_1 (x_2 y_3 - y_2 x_3) - \underline{e}_2 (x_1 y_3 - y_1 x_3) + \underline{e}_3 (x_1 y_2 - y_1 x_2)$$

Es gelten

$$\underline{x} \times \underline{y} \perp \underline{x}, \underline{y}$$

$$\underline{x} \times \underline{y} = -(\underline{y} \times \underline{x})$$

ε-Tensor (Levi-Civita-Tensor):

$$\varepsilon^{ijk} = \begin{cases} 1 = \varepsilon^{123} = \varepsilon^{231} = \varepsilon^{312} & \text{zykl. Vertauschung} \\ -1 = \varepsilon^{213} = \varepsilon^{132} = \varepsilon^{321} \end{cases}$$

0 sonst

$$\underline{x} \times \underline{y} = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} \sum_{k=1}^{3} \varepsilon^{ijk} x_i y_j \underline{e}_k$$

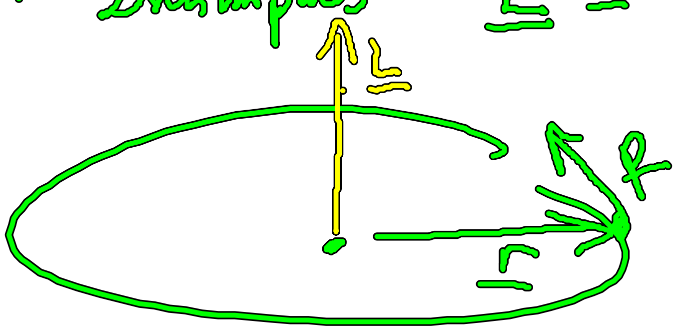
$$\equiv \varepsilon^{ijk} x_i y_j \underline{e}_k$$

(Weglassen der Summensymbole: Einsteinsche Summationskonvention)

$$\underline{a} \times (\underline{b} \times \underline{c}) = \underline{b}(\underline{a} \cdot \underline{c}) - \underline{c}(\underline{a}\,\underline{b})$$

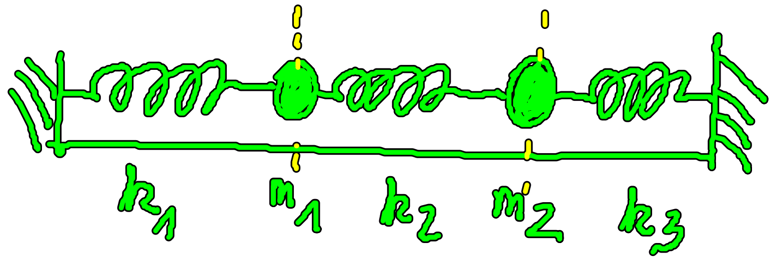
„bac-cab" Regel.

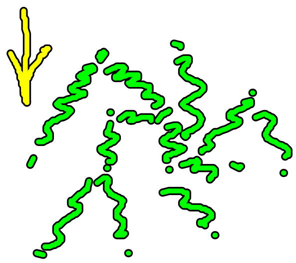
Beispiel: Drehimpuls $\underline{L} \equiv \underline{r} \times \underline{p}$



2.5. Anwendung MECHANIK: Eigenschwingungen und Eigenmoden (Normalmoden)

N Massenpunkte, durch lineare Federn miteinander verbunden





$$m_i \ddot{\underline{r}}_i = \sum_{j=1}^{N} \underline{\underline{A}}_{ij} \underline{r}_j \, , \qquad i = 1, \dots, N$$

Matrix $\underline{\underline{A}}_{ij}$ wird durch die Anordnung bestimmt.

Lösung durch Exponentialansatz

Fall $d = 1$ (eine Dimension), $N = 2$

Zwei gekoppelte Massen m_1, m_2:

$$m_1 \ddot{x}_1 = A_{11} x_1 + A_{12} x_2$$

$$m_2 \ddot{x}_2 = A_{21} x_1 + A_{22} x_2 \, ,$$

$$A_{ij} \in \mathbb{R}$$

Setze
$$x_1(t) = c_1 e^{-i\omega t}$$
$$x_2(t) = c_2 e^{-i\omega t}$$
ein.

$$-\omega^2 m_1 c_1 = A_{11} c_1 + A_{12} c_2$$
$$-\omega^2 m_2 c_2 = A_{21} c_1 + A_{22} c_2$$

Schreiben als

$$\boxed{\left(\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{M}}\,\omega^2\right)\underline{c} = \underline{0}} \qquad \underline{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

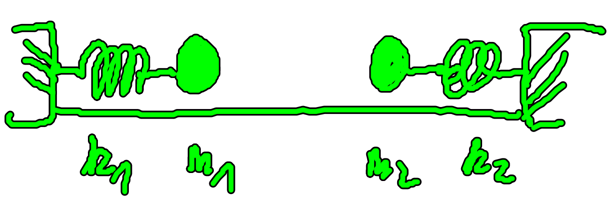
$$\underline{\underline{B}}\,\underline{x} = \underline{0}$$

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}, \quad \underline{\underline{M}} = \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix}$$

Hat nicht-triviale Lösung für

$$\boxed{\det\left(\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{M}}\,\omega^2\right) = 0} \Rightarrow \text{Werte für } \omega^2$$

Fall ungekoppelter Massenpunkte



$$\Rightarrow \underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} -k_1 & 0 \\ 0 & -k_2 \end{pmatrix}, \quad \text{denn}$$

$$m_1 \ddot{x}_1 = -k_1 x_1$$
$$m_2 \ddot{x}_2 = -k_2 x_2$$

Damit folgt

$$\det\left(\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{M}}\,\omega^2\right) = \begin{vmatrix} -k_1 + \omega^2 m_1 & 0 \\ 0 & -k_2 + \omega^2 m_2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \left(-k_1 + \omega^2 m_1\right)\left(-k_2 + \omega^2 m_2\right) = 0$$

also $\quad \omega^2 = \dfrac{k_1}{m_1} \quad$ oder $\quad \omega^2 = \dfrac{k_2}{m_2}$

Koeffizientenvektoren $\underline{c}$ aus $\left(\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{M}}\,\omega^2\right)\underline{c} = 0$

$$\begin{pmatrix} -k_1 + m_1\omega^2 & 0 \\ 0 & -k_2 + m_2\omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = 0$$

für $\omega = \omega_1 = \sqrt{\frac{k_1}{m_1}}$: $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}c_1\\c_2\end{pmatrix}$

für $\omega = \omega_2 = \sqrt{\frac{k_2}{m_2}}$: $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}c_1\\c_2\end{pmatrix}$

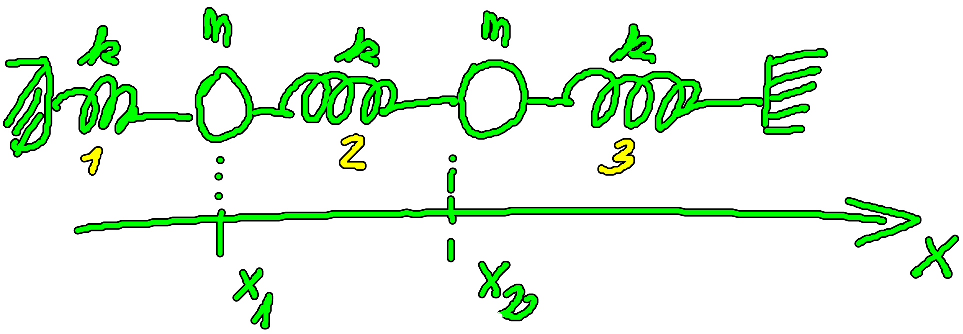
Aufgabe 1: $\delta_{ij} \equiv \begin{cases} 1 & \text{für } i=j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

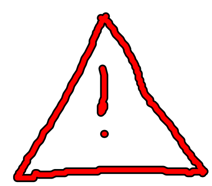
Allgemeine Lösung ist Linearkombination der Eigenmoden, d.h.

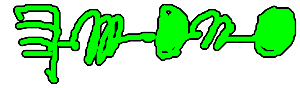
$\omega_1^2 = k_1/m$

$$\begin{pmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\left\{\alpha_1 e^{-i\omega_1 t} + \beta_1 e^{+i\omega_1 t}\right\}$$

$$+ \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\left\{\alpha_2 e^{-i\omega_2 t} + \beta_2 e^{+i\omega_2 t}\right\}$$







von F.1

$$m\ddot{x}_1 = -k x_1 - k(x_1 - x_2)$$

$$m\ddot{x}_2 = -k x_2 - k(x_2 - x_1)$$

Exponentialansatz:

$$\underline{\underline{A}} = k \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad \underline{\underline{M}} = m \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{M}}\,\omega^2\right) \underline{c} = \underline{0}$$

$$\Rightarrow \quad 0 = \det\left|\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{M}}\,\omega^2\right| = \begin{vmatrix} -2k + m\omega^2 & k \\ k & -2k + m\omega^2 \end{vmatrix}$$

$$= \left(-2k + m\omega^2\right)^2 - k^2$$

$$\Rightarrow \quad -2k + m\omega^2 = \pm k$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\omega_1^2 = k/m}, \quad \boxed{\omega_2^2 = 3k/m}$$

2 Eigenfrequenzen, jeweils mit $\pm$, insgesamt 4 Eigenwerte ω in $e^{-i\omega t}$

Jetzt Eigenvektoren $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ aus

$$\left(\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{M}}\,\omega^2\right) \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = 0 \quad \text{bestimmen!}$$

- Für $\omega = \omega_1$:

$$\begin{pmatrix} \underbrace{-2k+m\omega_1^2}_{-k} & k \\ k & \underbrace{-2k+m\omega_1^2}_{-k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad k \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

entspricht Schwingung

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \left\{ \alpha_1 e^{-i\omega_1 t} + \beta_1 e^{+i\omega_1 t} \right\}$$

Entsprechend für ω_2: Eigenvektor $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Allgemeine Lösung ist Superposition

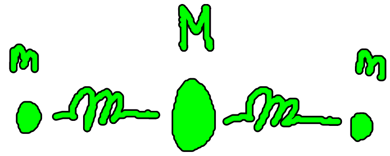
$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \left\{ \alpha_1 e^{-i\omega_1 t} + \beta_1 e^{+i\omega_1 t} \right\} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \left\{ \alpha_2 e^{-i\omega_2 t} + \beta_2 e^{+i\omega_2 t} \right\}$$

mit $\omega_1^2 = k/m$ $\rightsquigarrow$ 1. Normalmode des System

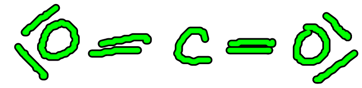
$\omega_2^2 = 3\,k/m$ $\rightsquigarrow$ 2. Normalmode des System

Mehrere (N > 2) gekoppelte Oszillatoren

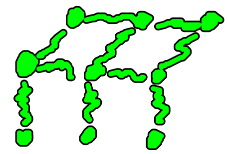
Analog zu N = 2, aber jetzt N × N - Matrizen statt 2 × 2 - Matrizen



Chemie



Festkörper



EDynamik

2.6 Lineare inhomogene Systeme

$$\underline{y}'(t) = \underline{\underline{A}}\, \underline{y}(t) + \underline{b}(t)$$

$\uparrow$ n×n-Matrix

1. Schritt: homogene Gleichung $\underline{b} \equiv 0$ hat Lösung

$$\underline{y}_h(t,t') = \underbrace{e^{\underline{\underline{A}}\cdot(t-t')}}_{\text{Propagator}} \begin{pmatrix}1\\1\\1\\\vdots\end{pmatrix}$$

mit AB $\underline{y}_h(t,t) = \begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\end{pmatrix}$.

2. Schritt: spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung

$$\underline{y}_s(t,t_0) = \int_{t_0}^{t} dt'\, e^{\underline{\underline{A}}(t-t')}\, \underline{b}(t')$$

denn $\frac{d}{dt}\underline{y}_s(t,t_0) = e^{\underline{\underline{A}}(t-t)}\, \underline{b}(t'=t) + \int_{t_0}^{t} dt'\, \underline{\underline{A}}\, e^{\underline{\underline{A}}(t-t')}\, \underline{b}(t')$

$$= \underline{b}(t) + \underline{\underline{A}}\, \underline{y}_s(t,t_0)$$

Gesamtlösung: Superposition von $y_s(t,t_0)$ und den Lösungen der homogenen Gleichung.

$$\underline{y}(t) = \int_{t_0}^{t} dt' \, e^{\underline{\underline{A}}(t-t')} \underline{b}(t') + e^{\underline{\underline{A}}(t-t_0)} \underline{y}(t=t_0)$$

$$\underline{y}(t_0) = \underline{y}(t=t_0)$$ Anfangsbedingungen zur Zeit $t=t_0$

für $t \geq t_0$ setzt sich die Lösung aus zwei Anteilen zusammen.