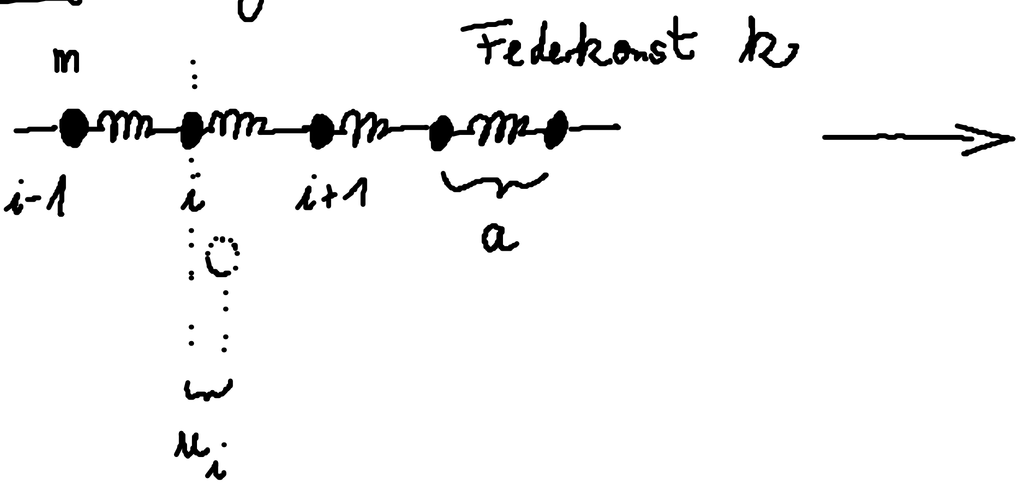
3.1 Wellengleichung in 1d



$$m\ddot{u}_i = k\left(u_{i+1} - u_i\right) - k\left(u_i - u_{i-1}\right)$$

DGL System mit ∞ großer Matrix

Jetzt die Auslenkung u_i als kontinuierliche Funktion $u(x)$

$$u_i \Rightarrow u(x)$$

$$u_{i+1} \Rightarrow u(x+a)$$

$$u_{i-1} \Rightarrow u(x-a)$$

$$u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1} \Rightarrow \underbrace{u(x+a)} - 2u(x) + \underbrace{u(x-a)}$$

Taylor

$a \to 0$

Um $a=0$ entwickeln

$$= \underbrace{u(x) + \frac{a}{1!}u'(x) + \frac{a^2}{2!}u''(x) + \dots}$$

$$-2u(x)$$

$$\underbrace{+u(x) - \frac{a}{1!}u'(x) + \frac{(-a)^2}{2!}u''(x) + \dots}$$

$$= a^2 u''(x) + O(a^3)$$

$$\lim_{a\to 0} \frac{u(x+a) - 2u(x) + u(x-a)}{a^2} = u''(x)$$

$$\ddot{u}_i = \frac{ka^2}{m} \underbrace{\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{a^2}}_{u''(x)}$$

$$\xrightarrow{a \to 0} \quad \frac{ka^2}{m} \to c^2$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x,t) = c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x,t)$$

$\frac{\partial}{\partial t}$: partielle Ableitung nach t (x fest)

$\frac{\partial}{\partial x}$: partielle Ableitung nach x (t fest)

$c^2 = \lim_{a \to 0} \frac{ka^2}{m}$ (Existenz wird angenommen)

c : Ausbreitungsgeschwindigkeit

AUFGABE: check $\dim(c) = \frac{m}{s}$

$[c] = m s^{-1}$

(„Dimensionsanalyse", wichtiges Werkzeug in der Physik).

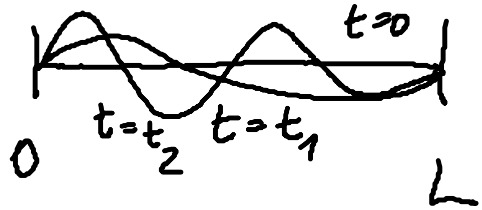
<u>Def.</u>: Die Wellengleichung

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x,t) = c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x,t)$$

ist eine partielle DGL zweiter Ordnung.

Es gilt Randbedingungen (RB), z.B.

$$u(x=0,t)=0$$
$$u(x=L,t)=0$$



Lösen auf dem Intervall $x \in [0, L]$

Anfangsbedingungen (AB)

$$u(x, t=0) = u_0(x) \quad \text{1. AB}$$
$$\frac{\partial}{\partial t} u(x, t=0) = v_0(x) \quad \text{2. AB}$$

Die Anfangswertaufgabe besteht in der Lösung der pDGL zu Zeiten $t>0$ für gegebene AB unter den gegebenen RB.

3.1.2. Separationsansatz

„Trennung der Variablen"

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x,t) = c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x,t)$$

Ansatz: $u(x,t) = y(x) \cdot z(t)$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[y(x) \cdot z(t)\right] = y(x) \frac{\partial^2}{\partial t^2} z(t) = y(x) z''(t)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[y(x) \cdot z(t)\right] = z(t)\, y''(x)$$

$$\Rightarrow y(x)\, z''(t) = c^2 z(t)\, y''(x)$$

$$\frac{z''(t)}{c^2 z(t)} = \frac{y''(x)}{y(x)} = \text{const} = -k^2$$

Also

$$z''(t) + c^2 k^2 z(t) = 0$$

$$y''(x) + k^2 y(x) = 0$$

Harmonischer Oszillator:

$$y(x) = \alpha \cos kx + \beta \sin kx,$$

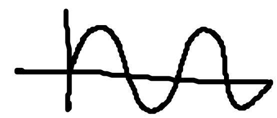
$$z(t) = \gamma_1 \cos(kct) + \gamma_2 \sin(kct)$$

α, β reelle Konstanten

<u>Def</u>: k: Wellenvektor (hier einkomponentig)

1) Erfüllung der RB $\quad u(x=0,t) = u(x=L,t) = 0$

$$u(x,t) = y(x)\, z(t)$$



$$y(x=0) = 0 \Rightarrow \alpha = 0$$

$$y(x=L) = 0 \Rightarrow y(L) = \beta \underbrace{\sin kL}_{0} = 0$$

$$kL = n\pi, \quad n = 1,2,3,\dots$$

$\Rightarrow$ Bedingung für $k = k_n = \dfrac{n \cdot \pi}{L}$

Es gibt nur bestimmte diskrete Werte für den Wellenvektor.

Als Lösungen kommen also nur

$$u_n(x,t) = \sin k_n x \left[a_n \cos k_n ct + b_n \sin k_n ct \right]$$

vor, hierbei ist $k_n \equiv \dfrac{n\pi}{L}$, $n = 1,2,3,\dots$ diskreter Index.

Also: RB führt zum Auftreten diskreter Wellenvektoren.

Superposition von Lösungen:

Allgemeine Lösung

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin(k_n x)\left[a_n \cos(k_n c t) + b_n \sin(k_n c t)\right]$$

Die Koeffizienten a_n, b_n werden aus den AB bestimmt.

Erfüllung der AB

1) $u(x, t=0) = u_0(x)$

2) $\frac{\partial}{\partial t} u(x, t=0) = v_0(x)$

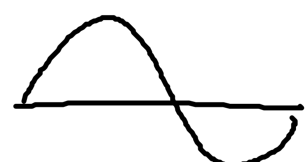
1) $$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin k_n x = u_0(x), \quad k_n = \frac{\pi \cdot n}{L}$$

Fourier-Sinus-Reihe

2) $$\sum_{n=1}^{\infty} k_n c b_n \sin k_n x = v_0(x)$$

Beispiel: $v_0(x) = 0 \Longrightarrow b_n = 0$

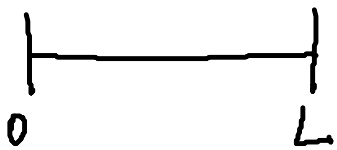
$$u_0(x) = \gamma \sin \frac{2\pi}{L} x$$



$\Longrightarrow \quad a_1 = 0, \; a_2 = \gamma, \; a_3 = 0, \; a_4 = 0, \ldots$

Allgemeine AB:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \qquad x \in [0,L]$$



finde die Koeffizienten a_n:

Mit $\sin\frac{n'\pi}{L}x$ multiplizieren und von 0 bis L integrieren $\Rightarrow$

$$\int_0^L dx\, f(x) \sin\frac{n'\pi}{L}x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \underbrace{\int_0^L dx \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \sin\left(\frac{n'\pi}{L}x\right)}_{\frac{L}{2}\delta_{n,n'}}$$

$$\delta_{n,n'} \equiv \begin{cases} 1, & n=n' \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$ Kronecker-Delta

$$= \frac{L}{2} a_{n'}$$

$$\Rightarrow \boxed{a_{n'} = \frac{2}{L} \int_0^L dx\, f(x) \sin\frac{n'\pi}{L}x}$$

3.2. Fourier-Analyse

Definition Fourier-Reihen einer Funktion auf dem Intervall $[-L, L]$ sind definiert als

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\frac{n\pi}{L}x + b_n \sin\frac{n\pi}{L}x \right)$$

mit $a_n, b_n \in \mathbb{R}$.

„Entwicklung nach stehenden Wellen".

Komplexe Fourier-Reihen einer periodischen Funktion

$f(x) = f(x+2L)$ auf $[-L, L]$

als

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\frac{n\pi}{L}x}$$

mit $c_n \in \mathbb{C}$.

// Bem: $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$

„Entwicklung nach ebenen (laufenden) Wellen"

Die Fourier-Koeffizienten bestimmt man durch

$$a_n = \frac{1}{L} \int^{L} dx\, f(x) \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

$-L$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} dx\, f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right)$$

$$c_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} dx\, f(x)\, e^{-i \frac{\pi n}{L} x}$$

folgt aus Multiplikation und Integration der Reihen mit sin, cos, $e^{\cdots}$

$$\frac{1}{L} \int_{-L}^{L} dx \cos\frac{n\pi x}{L} \cos\frac{m\pi x}{L} = \delta_{n,m}$$

$$\int_{-L}^{L} dx \cos\frac{n\pi x}{L} \sin\frac{m\pi x}{L} = 0$$

$$\frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} dx\, e^{i\frac{nx}{L}} e^{-i\frac{mx}{L}} = \delta_{nm}$$