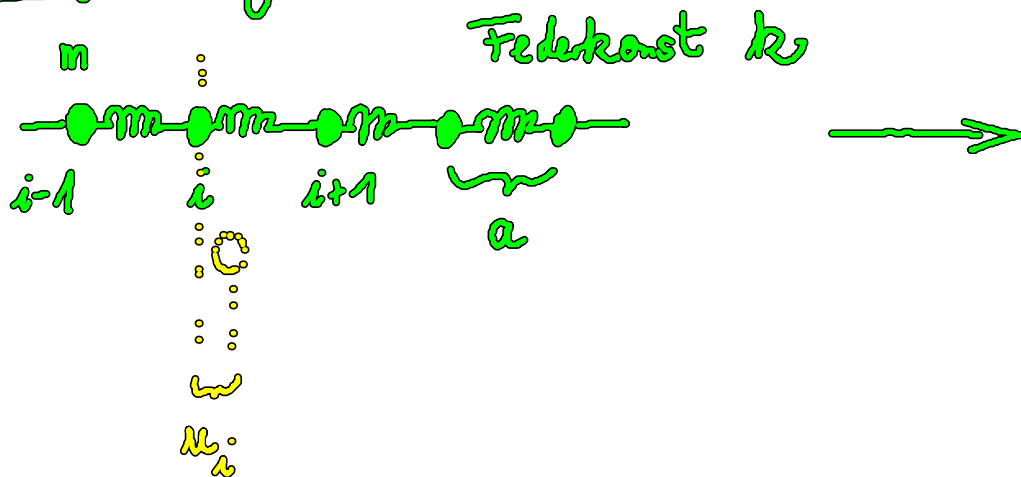


### 3.1 Wellengleichung in 1d



$$m \ddot{u}_i = k(u_{i+1} - u_i) - k(u_i - u_{i-1})$$

# DGL System mit $\infty$ großer Matrix

Führt die Auslenkung  $u_i$  als kontinuierliche Funktion  $u(x)$

$$u_i \rightarrow u(x)$$

$$u_{i+1} \rightarrow u(x+a)$$

$$u_{i-1} \rightarrow u(x-a)$$

$$u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1} \rightarrow \underbrace{u(x+a) - 2u(x) + u(x-a)}$$

$$\begin{aligned} \text{Taylor} \\ a \rightarrow 0 \end{aligned} = \underbrace{u(x) + \frac{a}{1!} u'(x) + \frac{a^2}{2!} u''(x) + \dots}$$

Um  $a=0$   
entwickeln

$$- 2u(x)$$

$$+ \underbrace{u(x) - \frac{a}{1!} u'(x) + \frac{(-a)^2}{2!} u''(x) + \dots}$$

$$= \underbrace{a^2 u''(x) + O(a^3)}$$

$$\lim_{a \rightarrow 0} \frac{u(x+a) - 2u(x) + u(x-a)}{a^2} = u''(x)$$

$$\ddot{u}_i = \frac{ka^2}{m} \underbrace{\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{a^2}}_{u''(x)}$$

$a \rightarrow 0 \rightarrow c^2$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x,t) = c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x,t)$$

$\frac{\partial}{\partial t}$  : partielle Ableitung nach  $t$   
( $x$  fest)

$\frac{\partial}{\partial x}$  : partielle Ableitung nach  $x$   
( $t$  fest)

$$c^2 = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{ka^2}{m} \quad (\text{Existenz wird angenommen})$$

$c$  : Ausbreitungsgeschwindigkeit

AUFGABE: check  $\dim(c) = \frac{m}{s}$   
 $[c] = m s^{-1}$

(„Dimensionsanalyse“,  
wichtiges Werkzeug in der Physik).

Def.: Die Wellengleichung

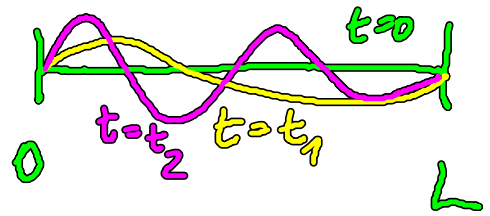
$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x,t) = c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x,t)$$

ist eine partielle DGL zweiter Ordnung.

Es gibt Randbedingungen (R.B.), z.B.

$$u(x=0, t) = 0$$

$$u(x=L, t) = 0$$



Lösen auf dem Intervall  $x \in [0, L]$

Anfangsbedingungen (AB)

$$u(x, t=0) = u_0(x) \quad \text{1. AB}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x, t=0) = v_0(x) \quad \text{2. AB}$$

Die Anfangswertaufgabe besteht in der Lösung der pDGL zu Zeiten  $t > 0$  für gegebene AB unter den gegebenen RB.

### 3.1.2. Separationsansatz

"Trennung der Variablen"

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x, t) = c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t)$$

Ansatz:  $u(x,t) = y(x) \cdot z(t)$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} [y(x) \cdot z(t)] = y(x) \frac{\partial^2}{\partial t^2} z(t) = y(x) z''(t)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} [y(x) \cdot z(t)] = z(t) y''(x)$$

$$\Rightarrow y(x) z''(t) = c^2 z(t) y''(x) \quad /$$

$$\frac{z''(t)}{c^2 z(t)} = \frac{y''(x)}{y(x)} = \text{const} \\ = -k^2$$

Also  $z''(t) + c^2 k^2 z(t) = 0$

$$y''(x) + k^2 y(x) = 0$$

Harmonischer Oszillator:

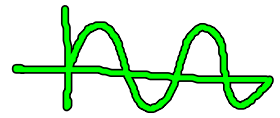
$$y(x) = \alpha \cos kx + \beta \sin kx, \quad \alpha, \beta \text{ reelle Konstanten}$$

$$z(t) = \gamma_1 \cos(ckt) + \gamma_2 \sin(ckt)$$

Def:  $k$ : Wellenvektor  
(hier einkomponentig)

1) Erfüllung der RB  $u(x=0,t) = u(x=L,t) = 0$

$$u(x,t) = y(x) z(t)$$



$$y(x=0) = 0 \Rightarrow \alpha = 0$$

$$y(x=L) = 0 \Rightarrow y(L) = \beta \sin kL = 0$$

$$kL = n\pi, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$\Rightarrow$  Bedingung für  $k = k_n = \frac{n\pi}{L}$

Es gibt nur bestimmte diskrete Werte für den Wellenvektor.

Als Lösungen kommen also nur

$$u_n(x,t) = \sin k_n x [a_n \cos k_n ct + b_n \sin k_n ct]$$

vor, hierbei ist  $k_n = \frac{n\pi}{L}$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$   
diskreter Index.

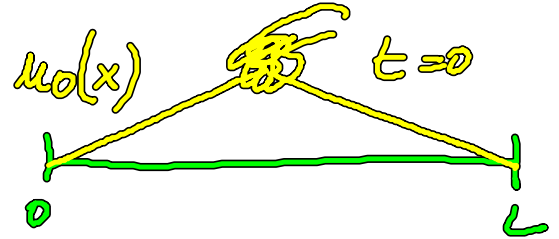
Also: RB führt zum Auftreten diskreter Wellenvektoren.

Superposition von Lösungen:

## Allgemeine Lösung

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin(k_n x) [a_n \cos(k_n c t) + b_n \sin(k_n c t)]$$

Die Koeffizienten  $a_n, b_n$  werden aus den AB bestimmt.



## Erfüllung der AB

1)  $u(x, t=0) = u_0(x)$

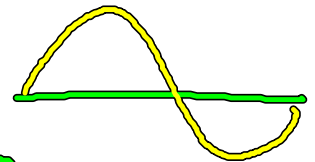
2)  $\frac{\partial}{\partial t} u(x, t=0) = v_0(x)$

1)  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin k_n x = u_0(x), k_n = \frac{\pi \cdot n}{L}$   
Fourier-Sinus-Reihe

2)  $\sum_{n=1}^{\infty} k_n c b_n \sin k_n x = v_0(x)$

Beispiel:  $v_0(x) = 0 \Rightarrow b_n = 0$

$$u_0(x) = \gamma \sin \frac{2\pi}{L} x$$

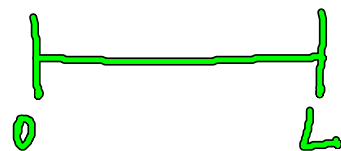


$$\Rightarrow a_1 = 0, a_2 = \gamma, a_3 = 0, a_4 = 0, \dots$$

Allgemeine AB:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \quad x \in [0, L]$$

finde die Koeffizienten  $a_n$ :



Mit  $\sin\frac{n'\pi}{L}x$  multiplizieren und

von 0 bis L integrieren  $\Rightarrow$

$$\int_0^L dx f(x) \sin\frac{n'\pi}{L}x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \underbrace{\int_0^L dx \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \sin\left(\frac{n'\pi}{L}x\right)}_{\frac{L}{2} \delta_{n,n'}}$$

$$\delta_{n,n'} \equiv \begin{cases} 1, & n=n' \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Kronecker-Delta

$$= \frac{L}{2} a_{n'}$$

$$\Rightarrow a_{n'} = \frac{2}{L} \int_0^L dx f(x) \sin\frac{n'\pi}{L}x$$

3.2. Fourier-Analyse



Definition      Fourier-Reihen einer Funktion  
auf dem Intervall  $[-L, L]$   
sind definiert als

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{n\pi}{L} x + b_n \sin \frac{n\pi}{L} x \right)$$

mit  $a_n, b_n \in \mathbb{R}$ .

„Entwicklung nach stehenden Wellen“.

Komplexe Fourier-Reihen einer periodischen Funktion

$$f(x) = f(x + 2L) \text{ auf } [-L, L]$$

als

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i \frac{n\pi}{L} x}$$

mit  $c_n \in \mathbb{C}$ .

// Bem:  $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$

„Entwicklung nach ebenen (laufenden) Wellen“

Die Fourier-Koeffizienten bestimmt man durch

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L dx f(x) \cos \left( \frac{n\pi}{L} x \right)$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L dx f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

$$c_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L dx f(x) e^{-i\frac{n\pi}{L}x}$$

folgt aus Multiplikation und Integration der  
Reihen mit  $\sin$ ,  $\cos$ ,  $e^{\dots}$

$$\frac{1}{L} \int_{-L}^L dx \cos\frac{n\pi x}{L} \cos\frac{m\pi x}{L} = \delta_{nm}$$

$$\int_{-L}^L dx \cos\frac{n\pi x}{L} \sin\frac{m\pi x}{L} = 0$$

$$\frac{1}{2L} \int_{-L}^L dx e^{i\frac{n\pi x}{L}} e^{-i\frac{m\pi x}{L}} = \delta_{nm}$$