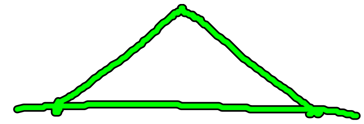
Fourier-Reihen.



$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n \sin\frac{n\pi x}{L}\right)$$

$$f(x+2L) = f(x)$$

periodisch.

- Entwicklung nach sin, cos,

alternativ nach $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \, e^{i\frac{n\pi x}{L}}$

Vektorraum der periodischen Funktion

$$f(x) = \sum_n \underbrace{c_n}_{\text{komplexe Koeffizienten}} \underbrace{e^{i\frac{n\pi x}{L}}}_{= e_n(x) \text{ Basisfunktionen}}$$

Die Funktionen f sind Elemente eines Vektorraums $\mathcal{H}$, der von den Basisfunktionen e_n aufgespannt wird.

$\mathcal{H}$ heißt Hilbertraum.

$\mathbb{C}^d$

$$\underline{y} = \sum_{n=1}^{d} c_n \underline{e}_n$$ Vektor

$c_n \in \mathbb{C}$, $\underline{e}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\ \vdots\end{pmatrix}, \dots$

$$c_n = (\underline{e}_n, \underline{y})$$ Skalarprodukt

Beispiel $\underline{y} = \begin{pmatrix}2\\4\\-5\end{pmatrix}$

$$c_2 = (0,1,0)\begin{pmatrix}2\\4\\-5\end{pmatrix} = 4$$

$$(\underline{x},\underline{y}) = \sum_{i=1}^{d} x_i^* y_i$$

Basis $\{\underline{e}_i\}$: $(\underline{e}_n,\underline{e}_m)=\delta_{nm}$

Orthonormalbasis

$\mathcal{H}$

$$f = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e_n$$

e_n Basisfunktionen,

$$e_n(x) = e^{in\pi x/L}$$

$$c_n = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} dx\, e_n^*(x) f(x)$$

Skalarprodukt!

$$(g,f) = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} dx\, g^*(x) f(x)$$

Fourierkoeffizienten c_n werden durch das Skalarprodukt (e_n, f) des Vektors f mit dem n-ten Basisvektor e_n erhalten.

- Orthogonalbasis $\{e_n\}$

$$(e_n,e_m) = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} dx\, e_n^*(x)\, e_m(x)$$

$$= \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} dx\, e^{-i\frac{n\pi x}{L}}\, e^{i\frac{m\pi x}{L}}$$

$$= \delta_{nm}$$

Die Funktionen $f \in \mathcal{H}$ sind Vektoren.

Es gilt ein Skalarprodukt

$$(g, f) \equiv \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} dx \, g^*(x) f(x).$$

Konvergenz der Fourierreihe

Endliche Reihe $f_N : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $f_N(x) = \sum_{j=-N}^{N} a_j e^{\frac{ij\pi x}{L}}$

konvergieren im Allgemeinen nicht punktweise (d.h. für jedes festes x), sondern nur im quadratischen Mittel.

$$\lim_{N \to \infty} \| f - f_N \| = 0,$$ wobei

die NORM durch das Skalarprodukt definiert wird,

d.h. $$\| f - f_N \|^2 = (f - f_N, f - f_N)$$
$$= \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} dx \, | f(x) - f_N(x) |^2 .$$

Bemerkung: Im $\mathbb{C}^n$ war

$$\|y\|^2 = (y,y) = y \cdot y = \sum_{i=1}^{d} \underbrace{|y_i|^2}_{y_i^* \cdot y_i}$$

Im Hilbertraum $\mathcal{H}$ ist

$$\|f\|^2 = (f,f) = \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} dx \, \underbrace{|f(x)|^2}_{f^*(x) \cdot f(x)}$$

Fourierreihen $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \, e^{i n \pi x / L}$ konvergieren

nur im quadratischen Mittel.

Es gilt weiterhin die Parsevalsche Gleichung

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 = \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} dx \, |f(x)|^2$$

(Beweis als AUFGABE). „Satz des Pythagoras in $\mathcal{H}$"!

Literatur: FORSTER, Analysis I.

3.3 Die Diffusionsgleichung

Konzentration $n(x,t)$

$$\frac{\partial}{\partial t} n(x,t) = D \frac{\partial^2}{\partial x^2} n(x,t)$$

pDGL erster Ordnung in t

D: Diffusionskonstante.

Diffusionsstromdichte $j(x,t)$

$$j(x,t) = -D \frac{\partial}{\partial x} n(x,t)$$

1. Fick'sches Gesetz

Kontinuitätsgleichung: $\frac{\partial}{\partial t} n(x,t) = -\frac{\partial}{\partial x} j(x,t)$

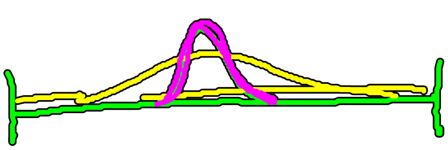
aus der Erhaltung der Masse

(AUFGABE: Kont.gl. herleiten)

Einsetzen liefert die Diffusionsgleichung

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t} n(x,t) = D \frac{\partial^2}{\partial x^2} n(x,t)}$$

- Randbedingungen, z.B. $n(0,t) = n(L,t) = 0$



oder $j(0,t) = j(L,t) = 0$

- AB zur Zeit $t=0$, $n(x,0) = \underline{n_0(x)}$

Lösung durch Trennung der Variablen (Separationsansatz)

$$n(x,t) = y(x)\, z(t)$$

$$\Rightarrow \quad y(x)\, \dot{z}(t) = z(t)\, D\, y''(x)$$

$$\Rightarrow \quad \underbrace{\frac{\dot z}{Dz}} = \frac{y''}{y} = -k^2$$

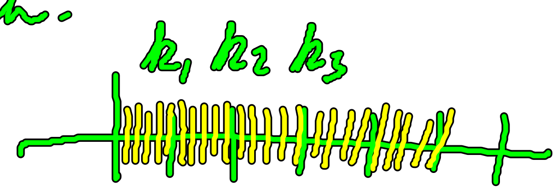
$$z(t) = e^{-Dk^2 t}, \quad y(x) = \alpha \cos kx + \beta \sin kx$$

$k = \frac{n\pi}{L}$ für endliches Intervall aus den RB.

$$n(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-Dk_n^2 t}\left[a_n \cos k_n x + b_n \sin k_n x\right]$$

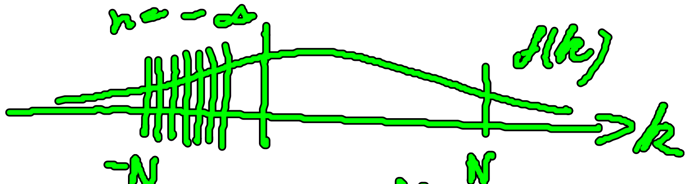
Was passiert für $L \to \infty$ (im Intervall $(0,L)$), d.h. Ränder $\to$ Unendlich.

$$k_n = \frac{n\pi}{L}$$



Funktion $f(x)$ auf $[-L,L]$ mit

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\pi x/L} \quad \text{für } L \to \infty.$$



Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(k)\,dk = \lim_{\substack{N\to\infty \\ L\to\infty}} \sum_{n=-N}^{N} \Delta k\, f(k_n), \quad \Delta k = \frac{\pi}{L} = k_{n+1} - k_n$$

$$= \lim_{N,L\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} \underbrace{\frac{2\pi}{2L}}_{=\Delta k} f(k_n)$$

Riemann-Summe.

$=\Delta k$ Feinheit der Unterteilung

$$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dk\, f(k) = \lim_{N,L\to\infty} \frac{1}{2L}\sum_{n=-N}^{N} f\left(\frac{n\pi}{L}\right)}$$

$2L$: Länge des Intervalls

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\, e^{i\frac{n\pi x}{L}}$$

Fourierdarstellung

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \underbrace{\left(\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} dx'\, e^{-\frac{in\pi x'}{L}} f(x')\right)}_{\text{Fourier-Koeffizient}} e^{i\frac{n\pi x}{L}}$$

$$= \frac{1}{2L}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-L}^{L} dx'\, e^{-\frac{in\pi x'}{L}} f(x')\, e^{i n\pi x/L}$$

$k_n = \frac{n\pi}{L}$

$$\xrightarrow[L\to\infty]{} \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dk \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} dx'\, e^{-ikx'} f(x')}\, e^{ikx}$$

$$= \underline{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dk\; \tilde{f}(k)\; e^{ikx}}$$

Definition:

$$\tilde{f}(k) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} dx\, f(x)\, e^{-ikx}$$

Fouriertransformierte von f

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk\, \tilde{f}(k)\, e^{+ikx}$$

Fourier-Darstellung von f

(Fourier-Rücktransformation)

$$f \longleftrightarrow \tilde{f}$$

Bemerkungen: Faktor $\frac{1}{2\pi}$ wird in der Physik (meist) unsymmetrisch vor der Rücktrafo definiert, in der Mathematik (meist) symmetrisch $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$

$f(x)$ Darstellung von f im Ortsraum

$\tilde{f}(k)$ Darstellung von f im k-Raum

(im Raum der Wellenvektoren)

(im Impulsraum $p = \hbar k$, $\hbar = \frac{h}{2\pi}$

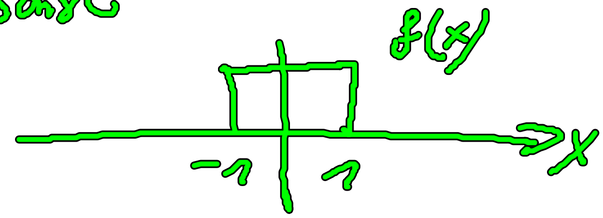
h Planck-Konstante

$p = \hbar k$ de-Broglie)

Die $\tilde{f}(k)$ sind die Fourierkoeffizienten von f in der Fouriertrafo.

Sie entsprechen den c_n's in $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \, e^{i\frac{n}{L}\pi x}$

Beispiel: $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } -1 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$



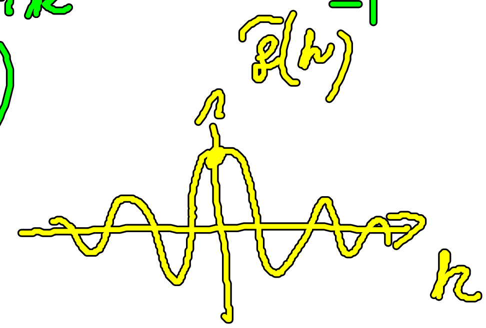
$$\Rightarrow \tilde{f}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \, f(x) \, e^{-ikx}$$

$$= \int_{-1}^{1} dx \cdot 1 \, e^{-ikx} = \frac{1}{-ik} e^{-ikx} \Big|_{-1}^{+1}$$

$$= \frac{1}{-ik} \left(e^{-ik} - e^{ik} \right)$$

$$= \frac{2}{2ik} \left(e^{ik} - e^{-ik} \right)$$

$$= \boxed{2 \frac{\sin k}{k}}$$



$\sin k = \frac{1}{2i} \left(e^{ik} - e^{-ik} \right)$

Analog auch für Funktionen $f(t)$ der Zeit.

$$\tilde{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt \, f(t) \, e^{i\omega t}$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \, \tilde{f}(\omega) \, e^{-i\omega t}$$

$f(t)$: Darstellung in der Zeit-Domäne

$\tilde{f}(\omega)$: Darstellung im Frequenzraum

hiebei: $\omega = 2\pi\nu$ Winkelfrequenz

z.B. Zerlegung eines Signals, „Knall" etc.

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dk \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \; \tilde{u}(k,\omega) \times$$

$$\times \underbrace{e^{-i\omega t} \; e^{+ikx}}_{e^{i(kx-\omega t)}}$$