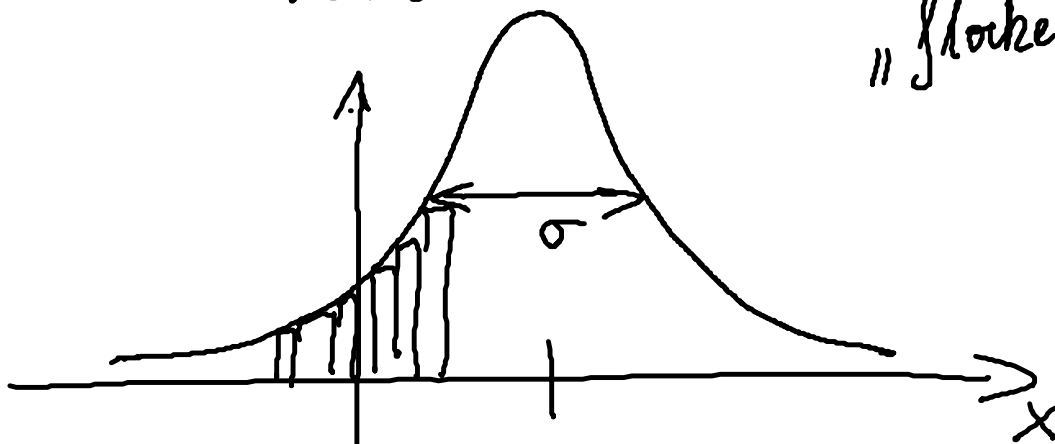


Fouriertransformation: Beispiel Gauß-Funktion

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-x_0)^2}$$

„Glockenkurve“



"Histogramm" | x_0

→ Wahrscheinlichkeits-Dichte (W-Dichte)

x zufälliges Ereignis

$p(x)dx$: W für Ereignis im Intervall $[x, x+dx]$

Normierung $\int_{-\infty}^{\infty} dx p(x) = 1$

Wichtige Formel: $\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ax^2 + bx} = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{\frac{b^2}{4a}}$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-x^2} = \sqrt{\pi}$$

Berechne FT von $p(x)$, d.h.

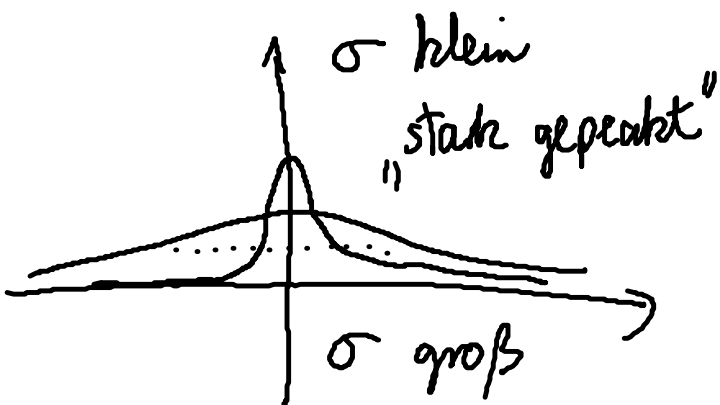
$$\tilde{p}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ikx} p(x) \quad (\text{Definition})$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int dx e^{-ikx} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \quad (x_0=0, \sigma)$$

$$= e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 k^2}$$

Ortsraum

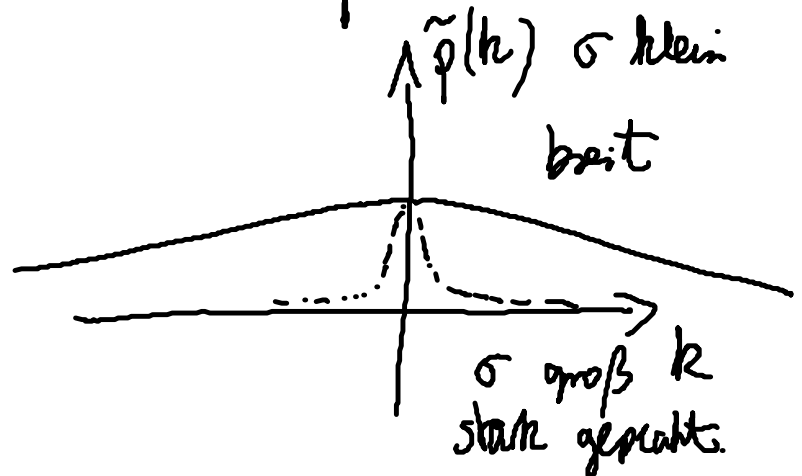
$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$



k-Raum

$$\tilde{p}(k) = e^{-\frac{1}{2}k^2\sigma^2}$$

wieder Glockenkurve

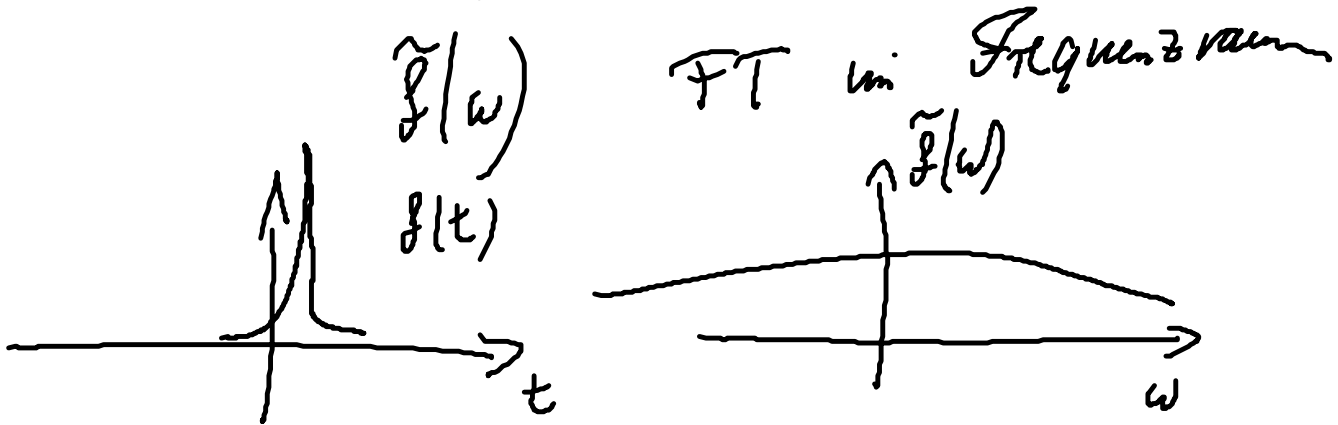


Also:

• Breite Gauß-Funktion $p(x)$ im Ortsraum
 \Rightarrow schmale Fouriertransformierte im k -Raum

• Schmale Gauß-Funktion $p(x)$
 \Rightarrow breite FT im k -Raum.

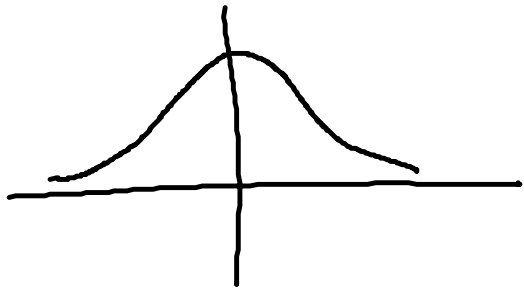
Analog $f(t)$ Funktion in der Zeitdomäne



Grenzfall $\sigma \rightarrow 0$, punktförmigen Dichte $p(x)$,

z.B. Ladungsverteilung

$$\rho(x) = -e p(x), p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$



für $\sigma \rightarrow 0$ ist die Ladung ganz scharf bei $x=0$ lokalisiert.

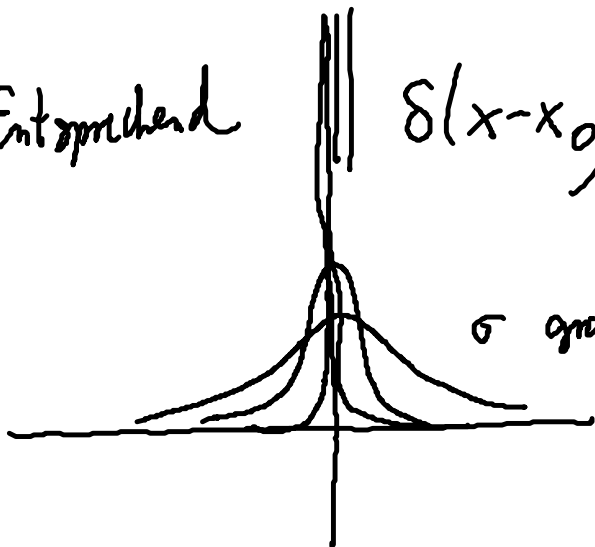
$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} = \delta(x)$$

Dirac'sche Delta - „Funktion“

(Delta - Distribution)

Entsprechend

$$\delta(x-x_0) = \lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}}$$



σ groß

σ mittel

σ sehr klein

Eigenschaften:

Wur definiert als Funktional in dem Sinne, dass

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \delta(x-x_0) f(x) = f(x_0)$$

für (beliebige, „gutartige“ Funktionen $f(x)$)

- Es gibt viele andere „Delta-Folgen“, z.B.

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \cdot e^{-ikx}$$

↑
„unendl. scharf
gepeakt“

↑
„unendlich
breit“

Eigenschaften der FT:

Faltungintegrale: Die Faltung zweier Funktionen

$f_1(t), f_2(t)$ ist

Faltung: $(f_1 * f_2)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau f_1(\tau) \cdot f_2(t-\tau)$

$$\mathcal{F}[f_1 * f_2](\omega) = \mathcal{F}[f_1](\omega) \cdot \mathcal{F}[f_2](\omega),$$

wobei $\mathcal{F}[f_1](\omega) = \tilde{f}_1(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt f(t) e^{+i\omega t}$.

Faltung in der Zeit-Domäne wird zum
gewöhnlichen Produkt im Frequenzraum.

Lösung von PDE mit FT

z.B. Diffusionsgleichung in 1d

$$\frac{\partial}{\partial t} n(x,t) = D \frac{\partial^2}{\partial x^2} n(x,t),$$

AB: $n(x,t=0) = n_0(x)$ vorgegebenes
Konzentrationsprofil

FT von $x \rightarrow k$, einsetzen von

$$n(x,t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \tilde{n}(k,t) e^{ikx}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{2\pi} \int dk \tilde{n}(k,t) e^{ikx} = D \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{1}{2\pi} \int dk \tilde{n}(k,t) e^{ikx}$$

$$\frac{1}{2\pi} \int dk \frac{\partial}{\partial t} \tilde{n}(k,t) e^{ikx} = D \frac{1}{2\pi} \int dk \tilde{n}(k,t) (-1)k^2 e^{ikx}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2\pi} \int dk \left(\frac{\partial}{\partial t} \tilde{n}(k,t) + Dk^2 \tilde{n}(k,t) \right) e^{ikx} = 0$$

= 0 !!!

$$\Rightarrow \text{gDGL} \quad \frac{\partial}{\partial x} \tilde{n}(k,t) + Dk^2 \tilde{n}(k,t) = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} y' + y = 0 \\ y = e^{-x} \end{array} \right\} \tilde{n}(k,t) = \underbrace{\tilde{n}(k,t_0)} e^{-Dk^2 t}$$

$$\tilde{n}(k,t=0) = \tilde{n}_0(k)$$

$$\begin{aligned} \text{denn } \tilde{n}(k,t=0) &= \int dx e^{-ikx} n(x,t=0) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ikx} n_0(x) \end{aligned}$$

Damit folgt

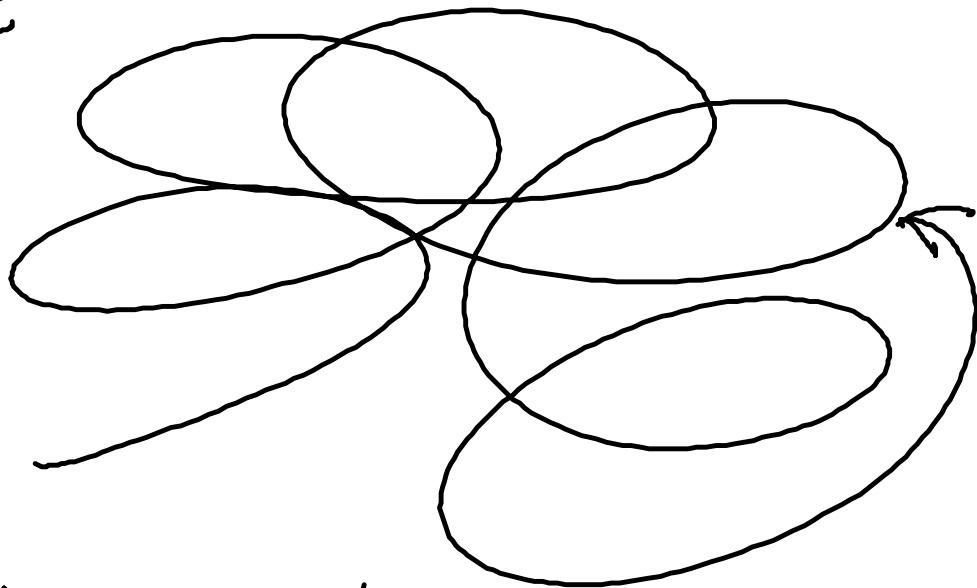
$$\begin{aligned} n(x,t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \tilde{n}(k,t) e^{ikx} && \text{F-Rücktrafo} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \tilde{n}_0(k) e^{-Dk^2 t} e^{ikx} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} dx' n_0(x') e^{-ikx'}}_{\dots} e^{-Dk^2 t} e^{ikx} \end{aligned}$$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(x,t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(x,t)$$

Schrödinger-Gleichung für freies Teilchen
der Masse m in 1d.

4. Kurven, krummlinige Koordinaten

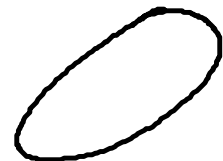
Massenpunkt



Kurve: Abbildung $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$t \mapsto \underline{r}(t)$$

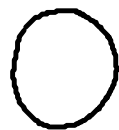
↑ Vektor



Beispiel:

$$\underline{r}(t) = \begin{pmatrix} a \cos \omega t \\ b \sin \omega t \end{pmatrix}$$

Ellipse

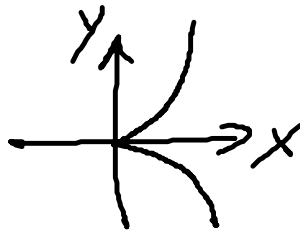


FORSTER Analys. II



oder Neilsche Parabel

$$\underline{r}(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ t^3 \end{pmatrix}$$



geschwindigkeit $\underline{v}(t) \equiv \frac{d}{dt} \underline{r}(t)$

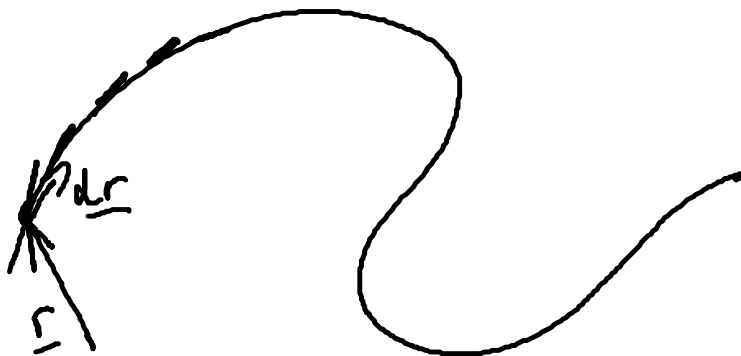
Beschleunigung $\underline{a}(t) \equiv \frac{d^2}{dt^2} \underline{r}(t)$

Beispiel: $\underline{r}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ \frac{1}{2} t^2 \end{pmatrix},$

$$\underline{v}(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ t \end{pmatrix}$$

$$\underline{a}(t) = \begin{pmatrix} -\cos t \\ -\sin t \\ 1 \end{pmatrix}$$

Bogenlänge s





Infinitesimales Kurvenstück $ds \equiv |d\underline{r}| = |\underline{v}| dt$

$$\Rightarrow \int_{t_0}^t ds = s(t; t_0) = \int_{t_0}^t dt' |\underline{v}(t')|$$

Setzt die Bogenlänge s (anstelle der Zeit t)
als Kurvenparameter benutzen:

$$\underline{r}(s) \equiv \underline{r}(t(s))$$

häufig weglassen.

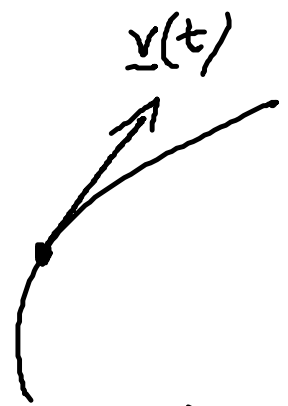
Ableitung nach s : $\underline{t}(s) \equiv \frac{d}{ds} \underline{r}(s) =$

$$= \frac{d}{dt} \underline{r}(t) \frac{dt}{ds}$$

(Kettenregel)

$$= \underline{v}(t) \frac{1}{|\underline{v}(t)|}$$

Einheits-
Tangentenvektor



$$\underline{n}(s) = \frac{d\underline{t}(s)}{ds}$$

Normalenvektor

$$\left| \frac{d\underline{t}(s)}{ds} \right|$$

Der Normalenvektor steht senkrecht auf dem Tangentialvektor, denn

$$1 = \underline{t}(s) \cdot \underline{t}(s) \quad / \quad d/ds$$

$$0 = 2 \underbrace{\frac{d\underline{t}(s)}{ds} \cdot \underline{t}(s)}_0, \quad \text{d.h.}$$

$$\underline{n}(s) \cdot \underline{t}(s) = 0$$

