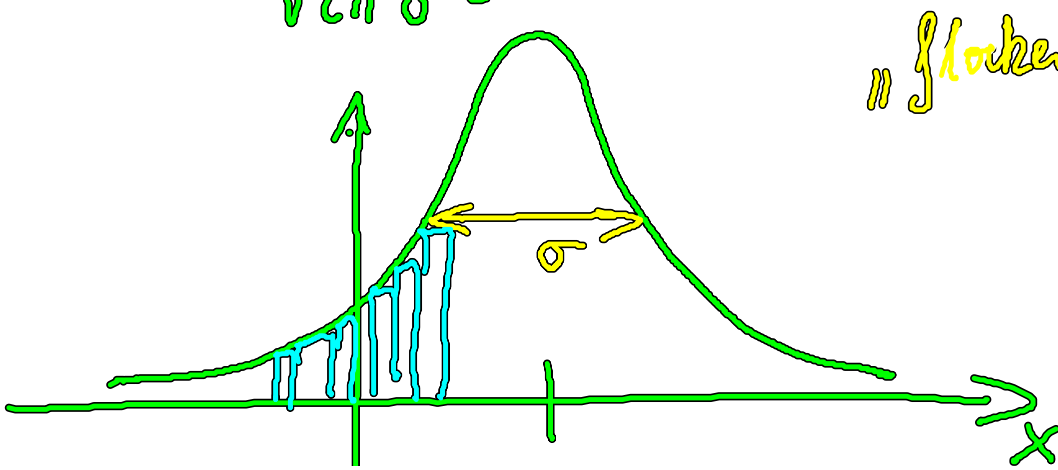
Fourier transformation: Beispiel Gauß-Funktion

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \, e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-x_0)^2}$$

„Glockenkurve"



x_0

„Histogramm"

→ Wahrscheinlichkeits-Dichte (W-Dichte)

x zufälliges Ereignis

$p(x)\,dx$: W für Ereignis im Intervall $[x, x+dx]$

Normierung $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} dx\, p(x) = 1$

Wichtige Formel: $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-ax^2+bx} = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\, e^{b^2/4a}$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-x^2} = \sqrt{\pi}.$$

Berechne FT von $p(x)$, d.h.

$$\tilde{p}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-ikx}\, p(x) \qquad \text{(Definition)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int dx\, e^{-ikx}\, e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \qquad (x_0 = 0, \text{ Ü})$$

$$= e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 k^2}$$

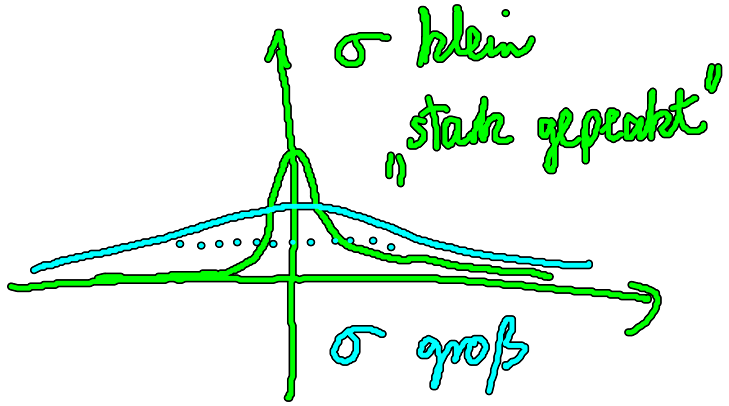
Ortsraum

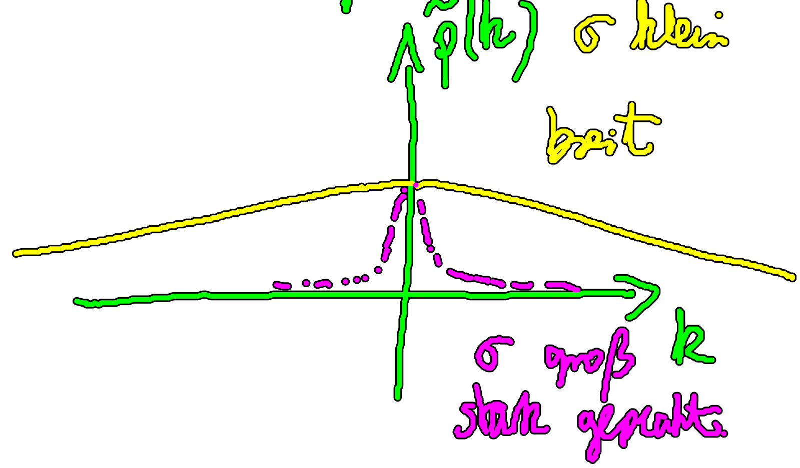
$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\, e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

k-Raum

$$\tilde{p}(k) = e^{-\frac{1}{2}k^2\sigma^2}$$

wieder Glockenkurve



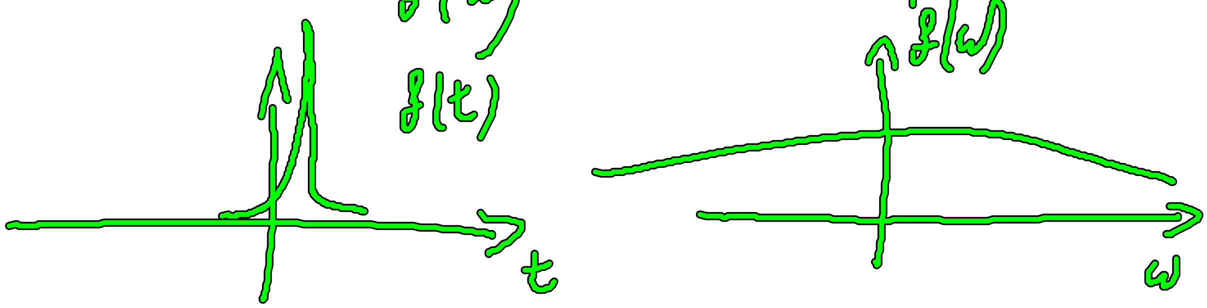


Also:

- Breite Gauß-Funktion $\rho(x)$ im Ortsraum
  $\Leftrightarrow$ schmale Fouriertransformierte im k-Raum
- Schmale Gauß-Funktion $\rho(x)$
  $\Rightarrow$ breite FT im k-Raum.

Analog: $f(t)$ Funktion in der Zeitdomäne

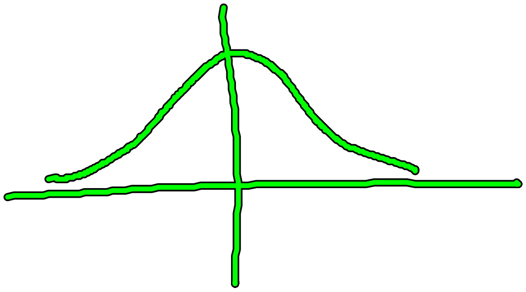
$\tilde{f}(\omega)$ FT im Frequenzraum



Grenzfall $\sigma \to 0$, punktförmigen Dichte $\rho(x)$,

z.B. Ladungsverteilung

$$\varrho(x) = -e\,\rho(x), \quad \rho(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\, e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$



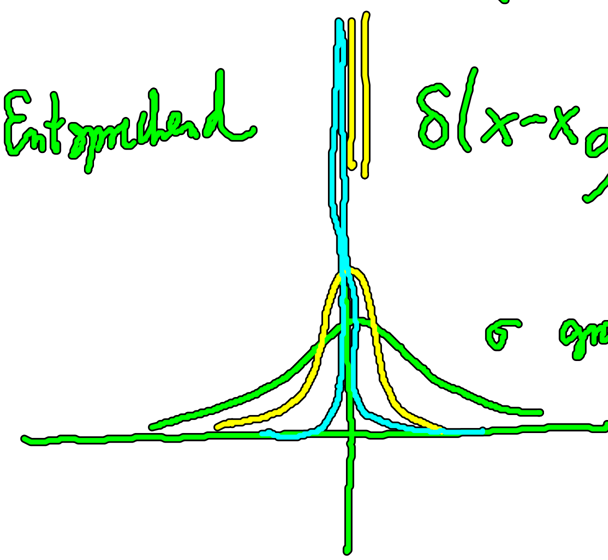
für $\sigma \to 0$ ist die Ladung ganz scharf bei $x=0$ lokalisiert.

$$\lim_{\sigma \to 0} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} = \delta(x)$$

Dirac'sche Delta-„Funktion"

(Delta-Distribution)

Entsprechend $\delta(x-x_0) = \lim\limits_{\sigma \to 0} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}}$



σ groß σ mittel

σ sehr klein

Eigenschaften:

Nur definiert als Funktional in dem Sinne, dass

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\ \delta(x-x_0) f(x) = f(x_0)$$

für (beliebige), „gutartige" Funktionen $f(x)$)

- Es gibt viele andere „Delta-Folgen", z.B.

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dk\, 1\cdot e^{-ikx}$$

„unendl. scharf gepeakt"

„unendlich breit"

Eigenschaften der FT:

Faltungsintegrale: Die <u>Faltung</u> zweier Funktionen $f_1(t)$, $f_2(t)$ ist

<u>Faltung</u>: $$(f_1 * f_2)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau\, f_1(\tau)\cdot f_2(t-\tau)$$

$$\mathcal{F}[f_1 * f_2](\omega) = \mathcal{F}[f_1](\omega)\cdot\mathcal{F}[f_2](\omega),$$

wobei $$\mathcal{F}[f_1](\omega) \equiv \tilde{f}_1(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt\, f_1(t)\, e^{+i\omega t}.$$

Faltung in der Zeit-Domäne wird zum gewöhnlichen Produkt im Frequenzraum.

Lösung von pDGL mit FT

z.B. Diffusionsgleichung in 1d

$$\partial/\partial t \, n(x,t) = D \frac{\partial^2}{\partial x^2} n(x,t),$$

$$\text{AB:} \quad n(x,t=0) = n_0(x)$$ vorgegebenes Konzentrationsprofil

FT von $x \longrightarrow k$, einsetzen von

$$n(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dk \, \tilde{n}(k,t) \, e^{ikx}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{2\pi} \int dk \, \tilde{n}(k,t) \, e^{ikx} = D \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{1}{2\pi} \int dk \, \tilde{n}(k,t) \, e^{ikx}$$

$$\frac{1}{2\pi} \int dk \, \frac{\partial}{\partial t} \tilde{n}(k,t) \, e^{ikx} = D \frac{1}{2\pi} \int dk \, \tilde{n}(k,t) \, (-1) k^2 e^{ikx}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2\pi} \int dk \, \underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial t} \tilde{n}(k,t) + D k^2 \tilde{n}(k,t) \right)}_{=0 \; !!!} e^{ikx} = 0$$

$\Rightarrow$ gDGL $\quad \frac{\partial}{\partial t}\tilde{n}(k,t) + Dk^2\tilde{n}(k,t) = 0$

$y' + y = 0$
$y = e^{-x}$ $\Bigg\}$ $\quad \tilde{n}(k,t) = \underbrace{\tilde{n}(k,t=0)}\, e^{-Dk^2 t}$

$$\tilde{n}(k,t=0) = \tilde{n}_0(k)$$

denn $\tilde{n}(k,t=0) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-ikx}\, n(x,t=0)$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-ikx}\, n_0(x)$$

Damit folgt

$$\underline{n(x,t)} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} dk\, \tilde{n}(k,t)\, e^{ikx} \qquad \text{F-Rücktrafo}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} dk\, \tilde{n}_0(k)\, e^{-Dk^2 t}\, e^{ikx}$$

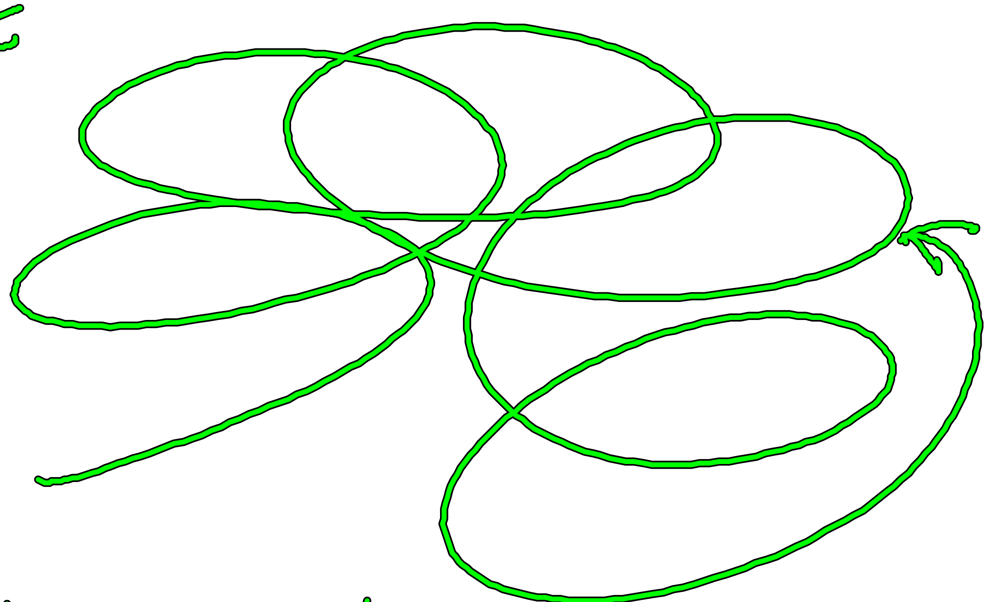
$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} dx \underbrace{\int\limits_{-\infty}^{\infty} dx'\, n_0(x')\, e^{-ikx'}}\, e^{-Dk^2 t}\, e^{ikx}$$

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(x,t) = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Psi(x,t)$$

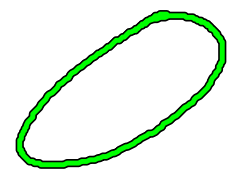
Schrödinger-Gleichung für freies Teilchen der Masse m in 1d.

4. Kurven, krummlinige Koordinaten

Massenpunkt

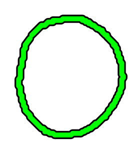


Kurve: Abbildung $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$



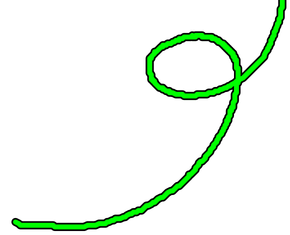
$$t \to \underline{r}(t)$$

Vektor



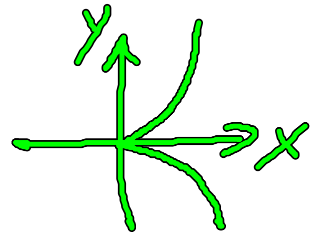
<u>Beispiel</u>: $$\underline{r}(t) = \begin{pmatrix} a \cos \omega t \\ b \sin \omega t \end{pmatrix}$$ Ellipse

FORSTER Analysis $\underline{\overline{II}}$



oder Neilsche Parabel

$$\underline{r}(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ t^3 \end{pmatrix}$$



Geschwindigkeit $\quad \underline{v}(t) \equiv \frac{d}{dt}\underline{r}(t)$

Beschleunigung $\quad \underline{a}(t) \equiv \frac{d^2}{dt^2}\underline{r}(t)$

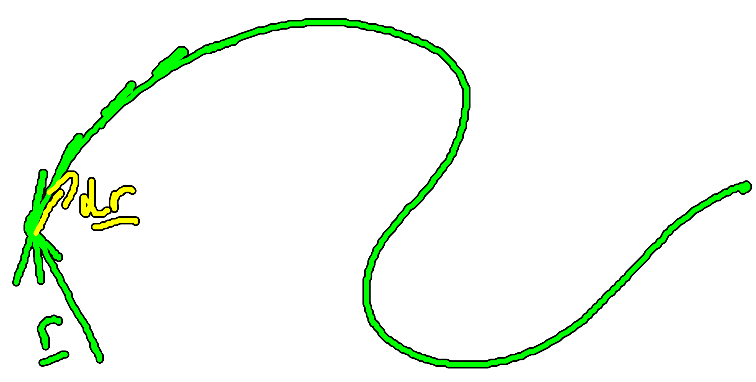
Beispiel:

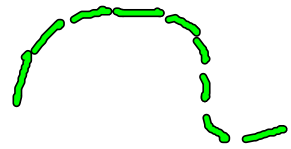
$$\underline{r}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ \frac{1}{2}t^2 \end{pmatrix},$$

$$\underline{v}(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ t \end{pmatrix}$$

$$\underline{a}(t) = \begin{pmatrix} -\cos t \\ -\sin t \\ 1 \end{pmatrix}$$

Bogenlänge $\quad s$





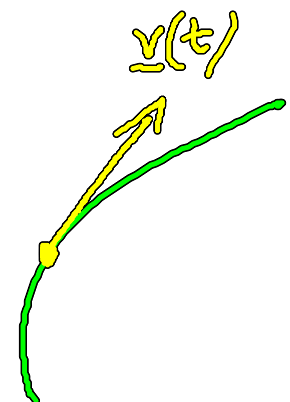
Infinitesimales Kurvenstück $\quad ds \equiv |d\underline{r}| = |\underline{v}|\,dt$

$$\Rightarrow \int_{t_0}^{t} ds = s(t;t_0) = \int_{t_0}^{t} dt'\,|\underline{v}(t')|$$

Jetzt die Bogenlänge s (anstelle der Zeit t) als Kurvenparameter benutzen:

$$\underline{\tilde{r}}(s) \equiv \underline{r}(t(s))$$

häufig weglassen.



Ableitung nach s: $\underline{t}(s) \equiv \frac{d}{ds}\underline{\tilde{r}}(s) =$

$$= \frac{d}{dt}\underline{r}(t)\,\frac{dt}{ds} \qquad \text{(Kettenregel)}$$

$$= \underline{v}(t)\,\frac{1}{|\underline{v}(t)|}$$

<u>Einheits-</u>
<u>Tangentialvektor</u>

$$\underline{n}(s) = \frac{d\underline{t}(s)}{ds} \Big/ \left|\frac{d\underline{t}(s)}{ds}\right|$$ Normalenvektor

Der Normalenvektor steht senkrecht auf dem Tangentialvektor, denn

$$1 = \underline{t}(s)\cdot\underline{t}(s) \qquad \Big|\ \frac{d}{ds}$$

$$0 = 2\underbrace{\frac{d\underline{t}(s)}{ds}\cdot\underline{t}(s)}_{0}, \quad \text{d.h.}$$

$$\underline{n}(s)\cdot\underline{t}(s) = 0$$